ΛΟΓΙΚΗ

Θεωρία και Πρακτική

Γ' Τάξη Ενιαίου Λυκείου

Μάθημα Επιλογής

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

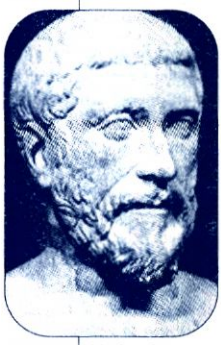
κεφάλαιο 1

Ι. Σύντομη Ιστορία της Λογικής

1. Απαρχές της Λογικής

Η λογική ασχολείται κατά βάση με τη μελέτη διαδικασιών και κανόνων, με τους οποίους μπορούμε να οδηγηθούμε με ορθό τρόπο από **υποθέσεις** σε **συμπεράσματα**. Θεμελιωτής της λογικής θεωρείται ο **Αριστοτέλης**, αλλά από διάφορες πηγές προκύπτει ότι με τη λογική ασχολήθηκαν και φιλόσοφοι πριν από αυτόν. Φυσικά, οι άνθρωποι επιχειρηματολογούσαν για αιώνες πριν, χωρίς να μπουν στον κόπο να διατυπώσουν κανόνες για το πώς ακριβώς έπρεπε να το κάνουν. Κάτι τέτοιο συμβαίνει με πολλές ανθρώπινες δραστηριότητες: συνήθως εκτελούμε κάποια σωματική ή πνευματική εργασία χωρίς να θεωρούμε απαραίτητο πριν να διατυπώσουμε κανόνες για το πώς ακριβώς πρέπει να εκτελείται. Άραγε πού βρίσκονται οι **απαρχές της λογικής**, δηλαδή σε ποιες ανθρώπινες δραστηριότητες υπήρχε έντονη και διαρκής χρήση επιχειρημάτων, ώστε να αναδειχθεί η ανάγκη συστηματικής μελέτης τους; Τα πεδία με αυτό το χαρακτηριστικό ήταν τρία, δηλαδή τα μαθηματικά, η φιλοσοφία και η καθημερινή επιχειρηματολογία, ειδικότερα στον πολιτικό και δικαστικό στίβο. Στη συνέχεια αναφερόμαστε αναλυτικότερα στο καθένα.

Ας ασχοληθούμε πρώτα με τα μαθηματικά. Τα μαθηματικά πριν από τους Ίωνες είχαν εμπειρικό χαρακτήρα και αφορούσαν στη λύση συγκεκριμένων προβλημάτων. Πράγματι, είναι γνωστό ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ανακάλυψαν, με εμπειρικά μέσα, πολλές αλήθειες της γεωμετρίας. Όμως είναι αποδεκτό ότι οι αρχαίοι Έλληνες ήταν αυτοί που πρώτοι συστηματοποίησαν τις αλήθειες αυτές, με τρόπο ώστε από κάποιες βασικές αλήθειες να αποδεικνύονται, **χωρίς επίκληση της ε-**


Πυθαγόρας

μπειρίας, οι υπόλοιπες αλήθειες. Η πρώτη γεωμετρική απόδειξη αποδίδεται στο **Θαλή το Μιλήσιο** (640-546 π.Χ.), είναι όμως βέβαιο ότι και οι **Πυθαγόρειοι** έκαναν τέτοιες αποδείξεις. Ο **Ευκλείδης**, διάσημος Έλληνας μαθηματικός του 4ου-3ου αιώνα π.Χ., στο έργο του *Στοιχεία* που απαρτίζεται από 13 τόμους, συστηματοποίησε τη γεωμετρία με τη μορφή παραγωγικού ή αξιωματικού συστήματος. Σε ένα τέτοιο σύστημα, με αφετηρία κάποιες προτάσεις παράγονται άλλες, με βάση συγκεκριμένους κανόνες παραγωγής τους. Σημειώνουμε ότι η έννοια του παραγωγικού συστήματος ήταν γνωστή στους Πυθαγόρειους και στην Ακαδημία του Πλάτωνα, υπήρχε όμως σύγχυση για το τι είναι απόδειξη.

Με δεδομένο ότι η γεωμετρία αφορά **είδη αντικειμένων** και όχι συγκεκριμένα αντικείμενα, για παράδειγμα τα τρίγωνα γενικά και όχι ένα συγκεκριμένο τρίγωνο, οι προτάσεις που ενδιαφέρουν είναι γενικές, δηλαδή της μορφής «Για κάθε τρίγωνο...». Το άλμα **από συγκεκριμένες σε γενικές προτάσεις** έγινε από τους Έλληνες φιλόσοφους και επιστήμονες.

Ας στραφούμε τώρα στη φιλοσοφία. Κατ' αρχήν πρέπει να αναφέρουμε ότι ο όρος «λογική» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά με την έννοια που έχει σήμερα τον 3ο αιώνα μ.Χ. από τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα. Στους διαλόγους του, όμως, ο Πλάτων διατυπώνει, συχνά με έμμεσο τρόπο, λογικές αρχές. Για παράδειγμα, στην *Πολιτεία* αναφέρει τον αποκαλούμενο «Νόμο της Αντίφασης», σύμφωνα με τον οποίο είναι αδύνατο κάτι να ισχύει και να μην ισχύει ταυτόχρονα. Παρ' όλο που ο Πλάτων ανακάλυψε μερικές έγκυρες λογικές αρχές, δεν έκανε καμιά συστηματική προσπάθεια να δημιουργήσει ένα σύστημα τέτοιων αρχών, πράγμα που έκανε ο Αριστοτέλης.

Ενώ η επιχειρηματολογία, στο πλαίσιο των μαθηματικών και της φιλοσοφίας οδήγησε φυσιολογικά στο έργο του Αριστοτέλη, η μελέτη καθημερινών επιχειρημάτων οδήγησε σε μια άλλη κατεύθυνση, δηλαδή στις λογικές μελέτες των **Μεγαρικών** και των **Στωϊκών φιλοσόφων**. Οι φιλόσοφοι αυτοί προσπάθησαν να συστηματοποιήσουν και να ταξινομήσουν μορφές καθημερινών επιχειρημάτων. Κάποια από αυτά τα επιχειρήματα δεν είναι ορθά, όπως για παράδειγμα το παρακάτω:

Αυτός ο σκύλος είναι πατέρας
Αυτός ο σκύλος είναι δικός σου
Άρα, αυτός ο σκύλος είναι δικός σου πατέρας,

το οποίο προέρχεται ουσιαστικά από το διάλογο *Ευθύδημος* του Πλάτωνος.

Επιχειρήματα όπως το πιο πάνω, που είναι αληθοφανή αλλά λανθασμένα, ο Αριστοτέλης τα αποκάλεσε **σοφίσματα**. Ο όρος «σόφισμα» προήλθε από τον ευρύτερα γνωστό όρο «σοφιστής», που αποδίδονταν σε ανθρώπους ικανούς στην παραγωγή τέτοιων επιχειρημάτων. Ο Αριστοτέλης ασχολήθηκε με κανόνες διεξαγωγής συζητήσεων διαμέσου ορθών επιχειρημάτων και με κανόνες εύρεσης και εντοπισμού σοφισμάτων. Κατά πάσα πιθανότητα, ήταν αρκετά διαδεδομένη η πρακτική διεξαγωγής δημόσιων **διαλεκτικών μονομαχιών**, κατά τη διάρκεια των οποίων ο ένας συνομιλητής προσπαθούσε να υποστηρίξει μια θέση, ενώ ο άλλος προσπαθούσε να την καταρρίψει. Τέτοιες μονομαχίες γίνονταν για απλή διασκέδαση, στα πλαίσια δικών ή πολιτικών συζητήσεων, καθώς και στα πλαίσια φιλοσοφικών διαλόγων και διερευνήσεων. Ο Πλάτων μάλιστα στην *Πολιτεία*, προειδοποιεί για την κακή χρήση, ιδιαίτερα από νέους, επιχειρημάτων για διασκέδαση, λέγοντας ότι η υπερβολική διάθεση για έλεγχο επιχειρημάτων μπορεί να τους οδηγήσει να μην εμπιστεύονται όλα όσα θεωρούσαν πριν ως αληθή και να δυσφημήσει και τους ίδιους αλλά και τη φιλοσοφία στους άλλους ανθρώπους.

Είναι πιθανόν οι σοφιστές να θεωρούσαν τα σοφίσματα ως χρήσιμα εργαλεία για τη δημιουργία, για παράδειγμα, σύγχυσης κατά τη διάρκεια μιας δίκης. Ένα πολύ γνωστό τέτοιο παράδειγμα αποτελούν τα επιχειρήματα που χρησιμοποίησαν ο **Πρωταγόρας** και ο μαθητής του **Εύαθλος** στη δίκη που προκάλεσε ο πρώτος. Η ιστορία έχει ως εξής:

Ο νεαρός Εύαθλος ζήτησε από τον Πρωταγόρα να τον δεχθεί ως μαθητή του και υποσχέθηκε να του πληρώσει το ποσό που ζήτησε ο Πρωταγόρας ως δίδακτρα. Ο Εύαθλος έδωσε ως προκαταβολή το μισό του ποσού και συμφώνησε να πληρώσει το υπόλοιπο την ημέρα που θα κέρδιζε την πρώτη του δίκη. Παρ' όλο που μαθήτευσε στον Πρωταγόρα για πολύ καιρό, πραγματοποιώντας μάλιστα σημαντική πρόοδο, δεν ανέλαβε καμιά δικαστική υπόθεση. Όταν πέρασε πολύς καιρός και φάνηκε ότι ο Εύαθλος προσπαθούσε να αποφύγει την αποπληρωμή του χρέους, ο Πρωταγόρας του έκανε μήνυση, ζητώντας του να καταβάλει το υπόλοιπο ποσό με βάση τη συμφωνία τους.

Την ημέρα της δίκης, ο Πρωταγόρας είπε στο δικαστήριο: «Ανόητε νεαρέ, σε κάθε περίπτωση θα υποχρεωθείς να μου πληρώσεις το ποσό, είτε κερδίσεις είτε χάσεις τη δίκη. Πράγματι, αν χάσεις τη δίκη, πρέπει να με πληρώσεις σύμφωνα με την ετυμηγορία, αφού θα έχω κερδίσει εγώ. Αν πάλι κερδίσεις τη δίκη, πρέπει να με πληρώσεις με

βάση τη συμφωνία μας, αφού θα έχεις κερδίσει την πρώτη σου δίκη». Η απάντηση του Εύαθλου ήταν η εξής: «Θα μπορούσα να έχω αντιμετωπίσει το σόφισμά σου αναθέτοντας την υπόθεση σε κάποιο συνήγορο. Θα μου δώσει όμως μεγαλύτερη χαρά αν σε νικήσω όχι μόνο στο δικαστήριο, αλλά και στο επιχείρημα. Σοφέ δάσκαλε, άκου γιατί δε θα υποχρεωθώ να σε πληρώσω, ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα της δίκης. Αν οι δικαστές αποφασίσουν υπέρ μου, δε θα σου χρωστάω τίποτε, αφού θα έχω κερδίσει. Αν πάλι αποφασίσουν εναντίον μου, δε θα σου χρωστάω τίποτε, με βάση τη συμφωνία μας, αφού δε θα έχω ακόμη κερδίσει κάποια υπόθεση».

Οι δικαστές σκέφτηκαν ότι η υπόθεση ήταν αμφιλεγόμενη και ανέβαλαν τη λήψη απόφασης επειδή φοβήθηκαν ότι η απόφασή τους, όποια και να ήταν, ίσως θεωρούνταν άκυρη. Σύμφωνα με άλλους, η ίδια ιστορία λέγεται ότι συνέβη μεταξύ του πρώτου ρητοροδιδάσκαλου Κόρακα και του μαθητή του Τεισία, από όπου και η γνωστή φράση των δικαστών «εκ κακού Κόρακος κακόν ωόν».

Από την άλλη πλευρά, οι σοφιστές είναι πιθανόν να αναζητούσαν πράγματι κάποιες λογικές αρχές, τις οποίες ήλπιζαν να ανακαλύψουν έμμεσα, εντοπίζοντας λανθασμένα επιχειρήματα τα οποία ήταν φαινομενικά ορθά. **Αλλά μόνο ο Αριστοτέλης προχώρησε σε συστηματική μελέτη λογικών θεμάτων.** Ο ίδιος μάλιστα αναφέρει ότι τα έργα του περί λογικής ήταν εντελώς πρωτοποριακά, αντιδιαστέλλοντας το έργο του προς τη ρητορική. Η ρητορική είχε σκοπό να διδάξει την τέχνη της πειθούς, ενώ η λογική την τέχνη της έγκυρης γνώσης και της απόδειξης. Γι' αυτό ο Αριστοτέλης δε θεωρεί τη λογική φιλοσοφική μάθηση, αλλά προπαιδεία και γενικό εργαλείο (όργανο) για κάθε επιστημονική εργασία. Στο έργο του *Περί Σοφιστικών ελέγχων* λέει ότι ενώ υπήρχε παλιά πολύ υλικό περί ρητορικής, δεν υπήρχε απολύτως τίποτε ως σημείο αναφοράς περί συλλογιστικής. Μάλλον εννοούσε ότι οι προηγούμενες μελέτες ήταν αποσπασματικές, όχι συστηματικές όπως η δική του.

Όπως αναφέραμε και πριν, λογικές μελέτες πρέπει να πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια της Μεγαρικής σχολής, τα μέλη της οποίας αποκαλούνταν «εριστικοί» (όπως αναφέρει ο **Διογένης ο Λαέρτιος**). Σχετικά αναφέρουμε ότι ο **Διόδωρος Κρόνος** και ο **Φίλων**, μέλη της σχολής αυτής, ασχολήθηκαν με σοβαρά λογικά προβλήματα. Παρ' όλο που αυτοί ήταν μεταγενέστεροι από τον Αριστοτέλη, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι συνέχισαν μια παράδοση γύρω από τα θέματα αυτά, η οποία είχε την αφετηρία της πριν από την εποχή του Αριστοτέλη.

Συνοψίζοντας, αρκετοί φιλόσοφοι πριν από τον Αριστοτέλη ασχολήθηκαν με θέματα λογικής, αλλά είναι αδιαμφισβήτητο ότι το έργο του Αριστοτέλη αποτελεί την πρώτη συστηματική μελέτη λογικών αρχών και κανόνων .

2. Η Λογική του Αριστοτέλη

Το σύνολο των εργασιών του Αριστοτέλη που αφορούσαν στη λογική είναι γνωστό ως *Όργανον* και εκδόθηκε από τους μαθητές του, μετά το θάνατο του ίδιου (322 π.Χ.). Είναι δύσκολο να κρίνουμε ποια είναι η χρονολογική σειρά σύνθεσης των μερών του *Οργάνου*, διότι ο Αριστοτέλης συχνά αναθεωρούσε τις εργασίες του, παραπέμποντας μερικές φορές σε μεταγενέστερες. Η χρονολογική σειρά που δέχονται οι περισσότεροι ερευνητές για τα μέρη του *Οργάνου* είναι η εξής: *Κατηγορίαι, Τοπικά, Περί Σοφιστικών Ελέγχων, Περί Ερμηνείας, Αναλυτικά Πρότερα και Αναλυτικά Ύστερα.*

Το έργο *Κατηγορίαι* δεν είναι αυστηρά λογικού χαρακτήρα και αφορά σε μια κατάταξη των **κατηγορημάτων** (ιδιοτήτων) σε δέκα τύπους, τους εξής:

Ουσίαν, ποσόν, ποιον, προς τι, πού, ποτέ, κείσθε, έχειν, ποιείν, πάσχειν.

Στα *Τοπικά*, ο Αριστοτέλης, ασχολείται με **κανόνες κατασκευής ορθών συλλογισμών.** Το υλικό του έργου αυτού αποτελεί ουσιαστικά τη θεωρία που αποκρυσταλλώθηκε σε μεταγενέστερα έργα. Είναι εύλογο να δεχθούμε ότι το πρακτικό ενδιαφέρον για υπερίσχυση ενός συνομιλητή κατά τη διάρκεια ανταλλαγής επιχειρημάτων οδήγησε στη μελέτη ορθών αρχών επιχειρηματολογίας. Το έργο *Περί Σοφιστικών Ελέγχων* θεωρείται ως παράρτημα των Τοπικών και αφορά τρόπους ανίχνευσης λανθασμένων επιχειρημάτων. Στο *Περί Ερμηνείας* εξετάζεται ποια ζεύγη προτάσεων έρχονται σε αντίθεση μεταξύ τους και με ποιο τρόπο. Τέλος, Τα *Αναλυτικά Πρότερα* αφορούν στην ανάλυση επιχειρημάτων με βάση τη μορφή τους, ενώ τα *Αναλυτικά Ύστερα* στη θεωρία γνώσης και στους τρόπους απόκτησής της. Η κύρια συνεισφορά του Αριστοτέλη στη λογική περιέχεται στο πρώτο κεφάλαιο των *Αναλυτικών Πρότερων.*

3. Περί Ερμηνείας

Όπως προαναφέραμε, στο έργο αυτό ο Αριστοτέλης ασχολείται με το ερώτημα: Πότε είναι μια πρόταση άρνηση μιας άλλης; Το ερώτημα αυτό έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για συνομιλητές που επιχειρηματολογούν υποστηρίζοντας αντίθετες θέσεις.

Οι προτάσεις που θεωρούνται είναι της μορφής **υποκείμενο-κατηγόρημα** και διακρίνονται από τον Αριστοτέλη σε τρία είδη: **ατομικές**, **καθολικές** και **μερικές**.

Ατομική είναι μια πρόταση, αν υποκείμενό της είναι το όνομα κάποιου ατόμου, για παράδειγμα, η πρόταση «Ο Καλλίας είναι ενάρετος». Μια (γενική) πρόταση, δηλαδή μια πρόταση που έχει ως υποκείμενο το όνομα ενός είδους, είναι **καθολική** , αν αφορά όλα τα άτομα του είδους, για παράδειγμα, η πρόταση «Κάθε άνθρωπος είναι λευκός». Μια γενική πρόταση είναι **μερική**, αν αφορά μερικά άτομα του είδους, όπως η πρόταση «Μερικοί άνθρωποι είναι λευκοί». Το μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας του Αριστοτέλη αφορά στην αντίθεση καθολικών και μερικών προτάσεων.

Αφού σε κάθε γενική πρόταση υπάρχει δυνατότητα αναφοράς στο υποκείμενο με καθολικό ή μερικό τρόπο, με καταφατική ή αποφατική (δηλαδή, αρνητική) έννοια, υπάρχουν τέσσερις περιπτώσεις γενικής πρότασης: καθολική καταφατική, καθολική αποφατική, μερική καταφατική και μερική αποφατική. Οι αντιθέσεις που υπάρχουν για τέτοιες προτάσεις φαίνονται στο ακόλουθο «τετράγωνο αντίθεσης», όπου τα παραδείγματα προέρχονται από τον Αριστοτέλη. Το σχήμα αυτό δεν υπάρχει στο *Όργανον*, αλλά χρησιμοποιείται για ευκολία. Τα γράμματα, α, ε, ι και ο εισήχθησαν στο Μεσαίωνα, για να είναι ευκολότερη η αναφορά στους τέσσερις αυτούς τύπους προτάσεων:

Καθολική καταφατική (α) Κάθε άνθρωπος είναι λευκός.		(ε) **Καθολική αποφατική** Κανένας άνθρωπος δεν είναι λευκός
Μερική καταφατική (ι) Μερικοί άνθρωποι είναι λευκοί		(ο) **Μερική αποφατική** Μερικοί άνθρωποι δεν είναι λευκοί

Τα γράμματα α,ε,ι, ο αποσπάσθηκαν αντίστοιχα από τους όρους:

πάντες (α), ουδείς (ε), τινές (ι), ου πας (ο).

Οι σχέσεις που αναφέρει ρητά ο Αριστοτέλης, ότι υπάρχουν στο τετράγωνο αντίθεσης, είναι οι εξής:

(α) Οι προτάσεις α,ο, αφενός και ε, ι, αφετέρου είναι «αντιφατικές» μεταξύ τους, δηλαδή δεν είναι δυνατό να είναι ταυτόχρονα αληθείς ούτε ταυτόχρονα ψευδείς. Πράγματι, δεν είναι δυνατόν η «Κάθε άνθρωπος είναι λευκός» να αληθεύει ταυτόχρονα με την «Κανένας άνθρωπος δεν είναι λευκός», ούτε είναι δυνατόν οι προτάσεις αυτές να είναι ταυτόχρονα ψευδείς,

(β) Οι προτάσεις α, ε είναι «ενάντιες», δηλαδή δεν είναι δυνατό να είναι ταυτόχρονα αληθείς, αλλά είναι δυνατό να είναι ταυτόχρονα ψευδείς. Πράγματι, δεν είναι δυνατό ταυτόχρονα να αληθεύει η «Κάθε άνθρωπος είναι λευκός» και η «Κανένας άνθρωπος δεν είναι λευκός», είναι όμως δυνατό να μην αληθεύει η «Κάθε άνθρωπος είναι λευκός» και ταυτόχρονα να μην αληθεύει η «Κανένας άνθρωπος δεν είναι λευκός», δηλαδή να αληθεύει η «Μερικοί άνθρωποι δεν είναι λευκοί» και ταυτόχρονα να αληθεύει η «Μερικοί άνθρωποι είναι λευκοί».

Επίσης ο Αριστοτέλης υποθέτει και τα εξής:

(γ) Οι προτάσεις ι, ο είναι «υποενάντιες» (μεταγενέστερος όρος), δηλαδή δεν είναι δυνατό να είναι ταυτόχρονα ψευδείς, αλλά είναι δυνατό να είναι ταυτόχρονα αληθείς. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος, ότι η ι είναι αντιφατική της ε, η ο είναι αντιφατική της α και οι α, ε είναι ενάντιες,

(δ) Η πρόταση ι είναι «υπάλληλη» της α και η πρόταση ο είναι «υπάλληλη» της ε, δηλαδή η πρόταση α συνεπάγεται την ι και η πρόταση ε συνεπάγεται την ο.

4. Η Θεωρία Συλλογισμών

Κατά τον Αριστοτέλη, μια έννοια είναι δυνατό να οριστεί «κατά πλάτος» και «κατά βάθος». Το **πλάτος** μιας έννοιας είναι το σύνολο των αντικειμένων που αντιπροσωπεύει η έννοια αυτή. Για παράδειγμα, το πλάτος της έννοιας «τρίγωνο» είναι το σύνολο όλων των δυνατών τριγωνικών (αισθητών ή νοητών) αντικειμένων. Από την άλλη πλευρά, **βάθος** είναι το σύνολο των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων τα οποία εί-

ναι κοινά σε όλα τα αντικείμενα που αντιπροσωπεύει η έννοια. Για παράδειγμα, το βάθος της έννοιας "τρίγωνο" αποτελείται από τα εξής χαρακτηριστικά γνωρίσματα: Κλειστό επίπεδο σχήμα, τρεις πλευρές, τρεις κορυφές. Στη σύγχρονη επιστήμη αντί για τους όρους πλάτος και βάθος χρησιμοποιούν αντίστοιχα τους όρους **έκταση** και **ένταση**.

Στα *Τοπικά* μελετώνται ορισμοί και κατατάξεις εννοιών, δηλαδή προτάσεις της μορφής «Κάθε Χ είναι Υ», «Κάθε Χ δεν είναι Υ», «Μερικά Χ είναι Υ» και «Μερικά Χ δεν είναι Υ». Η μελέτη συλλογισμών του Αριστοτέλη αφορά σε συλλογισμούς με χρήση τέτοιων προτάσεων και μπορεί να θεωρηθεί ως φυσικό επακόλουθο των αναζητήσεών του στα *Τοπικά*.

Στην αρχή των Αναλυτικών Πρότερων ο Αριστοτέλης ορίζει την έννοια **συλλογισμός**, όπως ορίζεται και σήμερα. Δηλαδή, λέει ότι "συλλογισμός" είναι μια λεκτική μορφή σύμφωνα με την οποία από ένα σύνολο υποθέσεων παράγονται κατ' ανάγκη συγκεκριμένα συμπεράσματα.

Αργότερα όμως στο ίδιο έργο ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί τον όρο αυτό μόνο για επιχειρήματα στα οποία το **συμπέρασμα** προκύπτει από **δυο μόνον προκείμενες** (δηλαδή, υποθέσεις), όπου και οι τρεις προτάσεις είναι απλές και αναφέρονται σε γενικούς όρους, δηλαδή σε ονόματα κάποιων ειδών. Ακριβέστερα λέει ότι το συμπέρασμα έπεται από τις υποθέσεις, οι οποίες συσχετίζουν τους **όρους** (έννοιες) του συμπεράσματος προς ένα τρίτο όρο. Ο όρος που εμφανίζεται ως κατηγόρημα του συμπεράσματος καλείται "μείζων όρος", ο όρος που εμφανίζεται ως υποκείμενο καλείται "ελάσσων όρος" και ο τρίτος όρος καλείται "μέσος όρος". Το συμπέρασμα λοιπόν είναι της μορφής **Ελάσσων όρος - Μείζων όρος**. Η επιλογή των όρων "μείζων" και "ελάσσων" οφείλεται στο γεγονός ότι στο βασικό παράδειγμα συλλογισμού ο μείζων είναι ευρύτερος ενώ ο ελάσσων είναι ο στενότερος από τους τρεις όρους. Για παράδειγμα, στο επιχείρημα:

Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος
Κάθε ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο
Άρα, κάθε τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο

ελάσσων όρος είναι ο όρος "τετράγωνο" και μείζων ο όρος "παραλληλόγραμμο".

Υπάρχουν τέσσερις δυνατότητες συσχετισμού των όρων στις προκείμενες, οι εξής:

(1) Μέσος - Μείζων	(2) Μείζων - Μέσος
Ελάσσων - Μέσος	Ελάσσων - Μέσος

(3) Μέσος - Μείζων
Μέσος - Ελάσσων

(4) Μείζων - Μέσος
Μέσος - Ελάσσων

Κατά τον Αριστοτέλη, δεν είναι φυσιολογικό και οι δυο όροι του συμπεράσματος να εμφανίζονται με αντεστραμμένους ρόλους στις προκείμενες οπότε το τέταρτο σχήμα δεν είναι αποδεκτό. Έτσι, για παράδειγμα, το συμπέρασμα «Κανένα τραπέζιο δεν είναι ρόμβος» δεν είναι φυσιολογικό να προκύψει, με βάση το τέταρτο σχήμα, από τις προκείμενες «Κάθε ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο» και «Κανένα παραλληλόγραμμο δεν είναι τραπέζιο», αλλά από τις «Κάθε ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο» και «Κανένα τραπέζιο δεν είναι παραλληλόγραμμο», με βάση το δεύτερο σχήμα. Κατά συνέπεια, υπάρχουν μόνο τρία "συλλογιστικά σχήματα" τα (1), (2) και (3) πιο πάνω.

Θαλής

Ο Αριστοτέλης διέκρινε δέκα τέσσερις "τρόπους" κατασκευής ορθών συλλογισμών στα πλαίσια των σχημάτων αυτών, μερικά παραδείγματα των οποίων παραθέτουμε πιο κάτω:

(Α) Παραδείγματα που εντάσσονται στα πλαίσια του πρώτου συλλογιστικού σχήματος:

Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε κύκλο
(1) Κάθε τετράγωνο είναι κανονικό πολύγωνο
Άρα, κάθε τετράγωνο εγγράφεται σε κύκλο.

(2) Κάθε λιοντάρι είναι θηλαστικό.
Μερικά σαρκοβόρα είναι λιοντάρια.
Άρα, μερικά σαρκοβόρα είναι θηλαστικά.

(Β) Παραδείγματα που εντάσσονται στα πλαίσια του δεύτερου συλλογιστικού σχήματος

(3) Κανένα τρίγωνο δεν είναι τετράπλευρο
Κάθε ρόμβος είναι τετράπλευρο
Άρα, κανένας ρόμβος δεν είναι τρίγωνο.

(4) Κανένα λιοντάρι δεν είναι φυτοφάγο
Μερικά θηλαστικά είναι φυτοφάγα
Άρα, μερικά θηλαστικά δεν είναι λιοντάρια.

(Γ) Παραδείγματα που εντάσσονται στα πλαίσια του τρίτου συλλογιστικού σχήματος

(5) Μερικοί ρόμβοι είναι τετράγωνα
Κάθε ρόμβος είναι τετράπλευρο
Άρα, μερικά τετράπλευρα είναι τετράγωνα.

(6) Μερικά ψίδια δεν είναι δηλητηριώδη
Κάθε ψίδι είναι ερπετό
Άρα, μερικά ερπετά δεν είναι δηλητηριώδη.

Σημειώνουμε ότι στο Μεσαίωνα δόθηκαν μνημονικά ονόματα στους τρόπους του Αριστοτέλη, με στόχο τη δυνατότητα εύκολης απομνημόνευσής τους.

Εκτός από συλλογισμούς που εμπλέκουν προτάσεις όπως αυτές που είδαμε, ο Αριστοτέλης ασχολήθηκε και με συλλογισμούς που αφορούν σε "τροπικές προτάσεις", δηλαδή προτάσεις στις οποίες υπάρχει ο όρος "αναγκαίος" ή "δυνατός" ή κάποιος παρόμοιος όρος. Αργότερα, προτάσεις της μορφής «Είναι αναγκαίο ότι...» ονομάστηκαν "αποδεικτικές", προτάσεις της μορφής. «Είναι δυνατόν ότι...» ονομάστηκαν "προβληματικές", ενώ οι υπόλοιπες προτάσεις ονομάστηκαν "βεβαιωτικές". Ο Αριστοτέλης ασχολήθηκε με τροπικές προτάσεις στο *Περί Ερμηνείας* και στα *Αναλυτικά Πρότερα* και με τροπικούς συλλογισμούς στα *Αναλυτικά Πρότερα*.

5. Το Έργο του Θεόφραστου

Η έκδοση των έργων του Αριστοτέλη έγινε κυρίως από το **Θεόφραστο**, διάδοχο του Αριστοτέλη στη διεύθυνση του **Λυκείου**. Ο Θεόφραστος συνέγραψε και δικά του έργα για τη λογική, από τα οποία δε διασώθηκε κανένα. Από μεταγενέστερους σχολιαστές έχουμε την πληροφορία ότι τα έργα του αφορούσαν στην ανάπτυξη και βελτίωση του έργου του Αριστοτέλη.

Ο Θεόφραστος θεωρείται ότι πρόσθεσε πέντε έμμεσους τρόπους, που συνδέονται με το πρώτο σχήμα. Στους τρόπους αυτούς έχουν αντι-

στραφεί οι ρόλοι του μείζονος και του ελάσσονος όρου, δηλαδή ο μείζων είναι υποκείμενο και ο ελάσσων είναι κατηγόρημα του συμπεράσματος. Όπως παρατήρησαν διάφοροι σχολιαστές, οι τρόποι του Θεόφραστου υπάρχουν ουσιαστικά σε κείμενα του Αριστοτέλη. Αργότερα υποστηρίχθηκε ότι οι τρόποι αυτοί πρέπει να ενταχθούν σε ένα τέταρτο σχήμα (δες και προηγούμενη ενότητα), γεγονός που προκάλεσε πολλές συζητήσεις.

6. Στωϊκή Λογική

Εκτός από την Περιπατητική σχολή λογικής, δηλαδή τη σχολή του Αριστοτέλη, υπήρξε στην αρχαιότητα και η Στωική σχολή λογικής. Η σχολή αυτή ιδρύθηκε από τον **Χρύσιππο** και στα πλαίσιά της συνεχίστηκαν οι λογικές μελέτες των Μεγαρικών φιλοσόφων. Σε αντίθεση με αυτό που συνέβη με το έργο του Αριστοτέλη, μόνο μικρό μέρος του έργου των Στωικών διασώθηκε. Ίσως ο σημαντικότερος λόγος ήταν ότι η επιρροή της αριστοτελικής λογικής ήταν τόσο μεγάλη που οδήγησε στην υποτίμηση από πολλούς ιστορικούς της συνεισφοράς των Στωικών.

Ενώ η λογική του Αριστοτέλη αφορά σε επιχειρήματα μαθηματικού/φιλοσοφικού χαρακτήρα, η λογική των Μεγαρικών και κατ' επέκταση των Στωικών αφορά σε επιχειρήματα διαλεκτικού χαρακτήρα– αυτός ήταν και ο λόγος που ήταν γνωστή ως "διαλεκτική". Με άλλα λόγια, ενώ το έργο των Περιπατητικών αφορά στη **λογική κατηγορημάτων**, εκείνο των Στωικών αφορά στη **λογική προτάσεων**. Όταν λέμε "λογική κατηγορημάτων" εννοούμε τη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων με έμφαση στην εσωτερική δομή των προτάσεων, δηλαδή στη μορφή "υποκείμενο-κατηγόρημα». Όταν λέμε «λογική προτάσεων" εννοούμε τη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων λαμβάνοντας κάθε πρόταση ως ένα ιδιαίτερο όλον.

Οι Στωικοί, όπως και οι φιλόσοφοι της Μεγαρικής σχολής, ενδιαφέρονταν για κατασκευή παραδόξων, δυο από τα οποία ήταν τα εξής:

• Παράδοξο του ψευδομένου:

Ένας άνθρωπος λέει ότι ψεύδεται. Είναι αυτό που λέει αληθές ή ψευδές;

• Παράδοξο του Φαλακρού:

Θα λέγατε ότι ένας άνδρας είναι φαλακρός αν είχε μια τρίχα; Ναι. Θα λέγατε ότι είναι φαλακρός αν είχε δυο τρίχες; Ναι... Μέχρι ποιο αριθμό τριχών θα λέγατε ότι είναι φαλακρός;

Παράδοξα όπως το πρώτο από τα πιο πάνω δείχνουν ότι είναι προβληματικό να επιτρέψουμε μια πρόταση να εκφράσει κάτι για την αλήθεια ή το ψεύδος του εαυτού της, ενώ παράδοξα όπως το δεύτερο δείχνουν πόσο ασαφείς είναι μερικές συνήθεις εκφράσεις.

Εφευρέτης αυτών των δυο παραδόξων θεωρείται ο **Ευβουλίδης ο Μιλήσιος**, μαθητής του ιδρυτή της Μεγαρικής σχολής **Ευκλείδη του Μεγαρέα**. Ιδιαίτερα για το πρώτο υπάρχουν αμφισβητήσεις – αρκετοί θεωρούν ότι ο πρώτος που το διατύπωσε είναι ο φιλόσοφος Επιμενίδης ο Κρης (δηλαδή από την Κρήτη). Όπως αναφέρει ο Διογένης ο Λαέρτιος, ο Ευβουλίδης είχε διαφορετικές απόψεις από τον Αριστοτέλη. Ίσως αυτό το γεγονός προκάλεσε την αντιπαλότητα μεταξύ της λογικής των Περιπατητικών και εκείνης των Στωικών. Οι λογικές αυτές θεωρούνταν ανταγωνιστικές για πολλούς αιώνες, μόλις μετά την Αναγέννηση έγινε σαφές ότι πρόκειται για **συμπληρωματικές και όχι αλληλοσυγκρουόμενες θεωρίες**.

Αυτός όμως που θεωρήθηκε από πολλούς ως ο μεγαλύτερος λογικός της αρχαιότητας ήταν ο Χρύσιππος, ο οποίος έζησε από το 280 έως περίπου το 205 π.Χ. Σύμφωνα με το Διογένη το Λαέρτιο, ο Χρύσιππος συνέγραψε 705 έργα, από τα οποία έχει διασωθεί πολύ μικρό μέρος. Το έργο του ήταν τόσο σπουδαίο που ο Διογένης ο Λαέρτιος αναφέρει: «Αν υπήρχε (η) διαλεκτική στους θεούς, δεν θα ήταν άλλη από αυτή του Χρύσσππου» ενώ ο Κλήμης ο Αλεξανδρεύς τον τοποθετεί πρώτο μεταξύ των λογικών (όπως τον Όμηρο μεταξύ των ποιητών, τον Πλάτωνα μεταξύ των φιλοσόφων και τον Αριστοτέλη μεταξύ των επιστημόνων).

Το έργο των Στωικών αφορά στα παρακάτω:

(Α) Στα πλαίσια της Μεγαρικής σχολής διερευνήθηκαν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες μια υποθετική πρόταση, δηλαδή μια πρόταση της μορφής «Αν..., τότε...», μπορεί να χαρακτηρισθεί ως "αληθής". Οι πρώτες απόψεις για το θέμα διατυπώθηκαν από το **Διόδωρο Κρόνο** και το **Φίλωνα** και ακολούθησαν οι απόψεις του Χρύσιππου και μελών της Περιπατητικής σχολής. Η άποψη του Φίλωνος ταυτίζεται με την άποψη που έχουμε σήμερα για την τυπική συνεπαγωγή (δες τον πίνακα αλήθειάς της αργότερα).

(Β) Οι Στωικοί πρώτοι έκαναν τη σπουδαιότατη διάκριση ανάμεσα

στο "σημαινόμενο" δηλαδή στο νόημα, και στο "σημαίνον" δηλαδή στη λέξη ή στην ακολουθία λέξεων που είναι φορέας του νοήματος. Αυτή η διάκριση απασχόλησε σοβαρά φιλοσόφους πολύ αργότερα, για παράδειγμα τον **Frege** (Φρέγκε) στον 19ο αιώνα. Στο ίδιο πλαίσιο, οι Στωικοί διατύπωσαν τη **θεωρία των λεκτών**. Χονδρικά αυτό που κυλούσαν "λεκτό" οι Στωικοί είναι αυτό που στην εποχή μας καλείται "γραμματική πρόταση". Μεγάλο μέρος των λεκτών ήταν τα "αξιώματα", δηλαδή προτάσεις που μπορούν να χαρακτηριστούν ως αληθείς ή ψευδείς. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η χρήση του όρου "αξίωμα" από τους Στωικούς διαφέρει ουσιαστικά από τη σημερινή –λέγοντας "αξίωμα" στην εποχή μας εννοούμε μια πρόταση της οποίας την αλήθεια έχουμε αποδεχθεί. Σύμφωνα με το Διογένη Λαέρτιο, τα αξιώματα διακρίνονταν από τους Στωικούς σε "απλά" και "μη-απλά". Τα δεύτερα κατατάσσονταν σε διάφορες κατηγορίες μεταξύ των οποίων είναι τα "αποφατικά" (δηλαδή, αρνήσεις), τα "συνημμένα" (δηλαδή, συνεπαγωγές) τα "συμπεπλεγμένα" (δηλαδή, συζεύξεις) και τα "διεζευγμένα" (δηλαδή διαζεύξεις). Είναι εύλογο να πούμε λοιπόν ότι οι Στωικοί ασχολήθηκαν με βασικές έννοιες της λογικής των προτάσεων (δες επόμενο κεφάλαιο).

(Γ) Οι Στωικοί εισήγαγαν πέντε θεμελιώδεις τύπους επιχειρημάτων, με βάση τους οποίους θα μπορούσαν να δικαιολογηθούν πολλά επιχειρήματα. Τους αναπόδεκτους αυτούς τύπους αποκάλεσαν "συνακτικά σχήματα" και τους εξέφρασαν χρησιμοποιώντας διατακτικούς αριθμούς (πρώτος, δεύτερος κτλ.) αντί για γράμματα - μεταβλητές που χρησιμοποίησε ο Αριστοτέλης. Ένα από τα σχήματα αυτά, το πιο σημαντικό, είναι το εξής:

Αν το πρώτο, τότε το δεύτερο
Όμως το πρώτο.
Άρα το δεύτερο.

7. Η Λογική στην Ύστερη Αρχαιότητα, στους Άραβες και στο Μεσαίωνα

Στην αρχή δεν υπήρξε καμιά συνεργασία μεταξύ των Περιπατητικών και των Στωϊκών για λογικές έρευνες. Θεωρείτο ότι οι προσεγγί-

σεις τους ήταν αντικρουόμενες και κατά συνέπεια, υπήρχε σημαντική διαμάχη και αντιζηλία μεταξύ τους. Αργότερα όμως στο τέλος του 1ου αιώνα μ.Χ., άρχισε να σβήνει η αντιζηλία αυτή και να διαφαίνεται ότι πρόκειται για συμπληρωματικές θεωρίες. Ο διάσημος γιατρός **Γαληνός** (129-199) ασχολήθηκε και με τις δυο θεωρίες, διεξήγαγε σοβαρές λογικές έρευνες και υπήρξε συγγραφέας κριτικών σχολιασμών έργων του Αριστοτέλη, του Θεόφραστου και του Χρύσιππου. Το έργο του *Εισαγωγή στη Διαλεκτική* έχει διατηρηθεί και υπάρχουν πληροφορίες για το έργο του *Περί Αποδείξεων*.

Μετά το Γαληνό, το μόνο πράγμα που έγινε για αιώνες ήταν η συγγραφή σχολιασμών για το έργο του Αριστοτέλη. Διαμέσου του έργου των σχολιαστών έφτασαν πληροφορίες για τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μέχρι το Μεσαίωνα.

Οι Άραβες μετά την κατάκτηση της Συρίας και του Ιράκ ήρθαν σε επαφή με την ελληνική επιστήμη, ειδικότερα με την αριστοτελική λογική. Τα πρώτα έργα λογικής στα αραβικά οφείλονται σε χριστιανούς μελετητές από τη Συρία και έθεσαν τα θεμέλια για την ανάπτυξη της αραβικής λογικής. Ο πρώτος άραβας που έγραψε για θέματα λογικής ήταν ο φιλόσοφος **αλ-Κιντί** (περίπου 805-873). Κατά το τέλος του 9ου αιώνα και τον 10ο αιώνα ήταν έντονη η δραστηριότητα της σχολής λογικής στη Βαγδάτη, όπου εγράφησαν εξαιρετικοί σχολιασμοί των λογικών έργων του Αριστοτέλη. Σημαντικός Άραβας λογικός ήταν ο **Αβικέννας** (Αμπού ιμπν Σινά, 980-1037), ο οποίος υποστήριξε ότι η λογική πρέπει να μελετάται ανεξάρτητα από τα κείμενα του Αριστοτέλη, όχι διαμέσου αυτών, όπως γινόταν στα πλαίσια της σχολής της Βαγδάτης. Η ρηξικέλευθη στάση του δεν έγινε αποδεκτή από τους Άραβες στην Ισπανία, οι οποίοι εξακολούθησαν, τουλάχιστον για ένα διάστημα, να ασχολούνται με το έργο του Αριστοτέλη. Η Ανδαλουσία υπήρξε κέντρο των αραβικών λογικών ερευνών κατά τον 11ο και τον 12ο αιώνα. Ο σπουδαιότερος εκπρόσωπος της σχολής αυτής ήταν ο **Αβερρόης** (Ιμπν Ρουσντ, 1126-1198), ο οποίος έκανε λεπτομερείς σχολιασμούς του *Οργάνου* και θεωρούσε τον εαυτό του ως ακόλουθο της σχολής της Βαγδάτης. Η αντιπαλότητα μεταξύ ανατολικής και δυτικής αραβικής σχολής λογικής συνεχίστηκε μέχρις ότου αποδέχτηκαν ότι σωστό ήταν να γίνει σύνθεση των δύο απόψεων.

Οι λογικές μελέτες που πραγματοποιήθηκαν στα σχολεία και πανεπιστήμια της Δυτικής Ευρώπης μεταξύ του 11ου και του 15ου αιώνα

είναι γνωστές με τον όρο "μεσαιωνική λογική". Όπως προαναφέραμε, η Δυτική Ευρώπη είχε στη διάθεσή της την περίοδο αυτή τα έργα των σχολιαστών, κυρίως του **Βοήθιου** (περίπου 480-524), τα οποία αναφέρονταν στη λογική παράδοση της Περιπατητικής αλλά και της Στωικής σχολής.

Ο πρώτος σημαντικός λογικός ήταν ο **Peter Abelard** (Πέτρος ο Αβελάρδος, 1079-1142), ο οποίος δίδαξε στο Παρίσι. Επηρεασμένοι από το έργο του Αβελάρδου, άλλοι λογικοί μελέτησαν σε βάθος τα κείμενα του Αριστοτέλη και συνέγραψαν εγχειρίδια λογικής που χρησιμοποιήθηκαν στα πανεπιστήμια της εποχής. Η λογική έφτασε στο ζενίθ της ανάπτυξής της κατά το 14ο αιώνα.

Δυστυχώς, η άνθηση της λογικής σταμάτησε το 15ο αιώνα, παρά το γεγονός ότι το ενδιαφέρον για αυτήν επεκτάθηκε στα πανεπιστήμια της Γερμανίας και της Ιταλίας. Τα λογικά δόγματα δεν άλλαξαν ουσιαστικά, απλώς παρήχθησαν πολλά απλοποιημένα συγγράμματα, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν ευρέως για πολύ καιρό, όπως η *Λογική του Port Royal*.

8. Η Νεότερη Λογική

Η νεότερη λογική, η οποία είναι γνωστή ως "συμβολική" ή "τυπική" ή "μαθηματική", άρχισε ουσιαστικά με τα έργα *Formal Logic (Τυπική Λογική)* του **Augustus De Morgan** (Αύγουστος ντε Μόργκαν, 1806-1871) και *Mathematical Analysis of Logic (Μαθηματική Ανάλυση της Λογικής)* του **George Boole** (Τζωρτζ Μπουλ, 1815-1864), τα οποία δημοσιεύθηκαν το 1847. Πριν από αυτά όμως υπήρχαν και άλλοι φιλόσοφοι και μαθηματικοί με παρόμοιες ιδέες. Από αυτούς ξεχωρίζουν ο **Gottfried Leibniz** (Γκότφριντ Λάιμπνιτς, 1646-1716) και ο **Bernard Bolzano** (**Μπέρναρντ** Μπολζάνο, 1781-1848). Ο πρώτος προσπάθησε να αναπτύξει μια παγκόσμια γλώσσα, την "characteristica universalis", διαμέσου της οποίας θα ήταν δυνατό να αναχθούν σε υπολογισμούς όλες οι επιστημονικές και φιλοσοφικές διερευνήσεις. Αν και το σχέδιο αυτό δεν αναπτύχθηκε σε μεγάλο βαθμό, μπορεί να θεωρηθεί ως προάγγελος μεγάλου μέρους αναζητήσεων της μαθηματικής λογικής. Ο δεύτερος ανέπτυξε κεντρικές έννοιες της λογικής,

Πλάτων

μεταξύ των οποίων και την έννοια της λογικής συνέπειας. Αξιοσημείωτο είναι ότι χρησιμοποίησε μια εν μέρει τυπική γλώσσα, δηλαδή τη γερμανική γλώσσα εμπλουτισμένη με διάφορα είδη σταθερών και μεταβλητών.

Προς το τέλος του 19ου αιώνα μπορούμε να διακρίνουμε τρεις επικαλυπτόμενες σχολές λογικών αναζητήσεων, την "αλγεβρική", τη "λογικιστική" και τη "φορμαλιστική" σχολή. Στην εκπληκτική άνθησή τους, ιδιαίτερα της δεύτερης και της τρίτης, οδήγησε η ανακάλυψη παραδόξων στη θεωρία συνόλων που ανέπτυξε αποφασιστικά ο **Georg Cantor** (Γκέοργκ Κάντορ, 1845-1918) - μεταξύ αυτών και του περίφημου "παραδόξου του Ράσελ".

Κυριότεροι εκπρόσωποι της αλγεβρικής σχολής υπήρξαν οι Τζωρτζ Μπουλ, **John Venn** (Τζων Βεν, 1834-1923), **Charles Peirce** (Τσαρλς Περς, 1839-1914) και **Ernst Schroder** (Έρνστ Σρέντερ, 1841-1902). Η σχολή αυτή επικέντρωσε το ενδιαφέρον της στη μελέτη της σχέσης που υπάρχει μεταξύ πράξεων όπως η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός και λογικών πράξεων στα πλαίσια επιχειρηματολογίας. Κύριος στόχος ήταν η ανάπτυξη λογισμών με εφαρμογή σε διάφορες περιπτώσεις, όπως προτάσεις, σύνολα και πιθανότητες. Αρχίζοντας με ένα ή περισσότερα συγγενή αλγεβρικά συστήματα, οι αλγεβριστές διατύπωναν ένα σύνολο αξιωμάτων τα οποία αλήθευαν σε κάθε ένα από τα συστήματα αυτά. Το σύστημα που ανέπτυξε, ο Μπουλ ήταν ουσιαστικά αυτό που σήμερα καλείται "άλγεβρα μπουλ".

Τα μέλη της λογικιστικής σχολής πίστευαν ότι η λογική αποτελούσε τη βάση για κάθε είδους επιχειρηματολογία. Οι κύριοι εκπρόσωποι της σχολής αυτής ήταν ο **Bertrand Russell** (Μπέρτραντ Ράσελ, 1872-1970) και ο **Gottlob Frege** (Γκότλομπ Φρέγκε, 1848-1925), ίσως ο μεγαλύτερος λογικός μετά τον Αριστοτέλη. Ο Φρέγκε ανέπτυξε με μαθηματική αυστηρότητα μια πλούσια τυπική γλώσσα στο έργο του *Begriffsschrift* (Εννοιογραφία) και προσπάθησε να δείξει ότι μέρη των μαθηματικών, όπως η Θεωρία Αριθμών και η Ανάλυση ήταν μέρη της λογικής. Επίσης, ο Φρέγκε στην προσπάθειά του να θεμελιώσει τη γεωμετρία υποστήριξε ότι αρκεί μια ιδιότητα για να περιγράψει το σύνολο των αντικειμένων που την ικανοποιούν. Όπως έδειξε όμως ο Ράσελ με την ανακάλυψη του περίφημου παραδόξου του, το σύστημα του Φρέγκε ήταν αντιφατικό και κατά συνέπεια, έπρεπε να απορριφθεί. Σε μια προσπάθεια να βελτιώσει την κατάσταση ο Ράσελ, σε συνεργασία με τον **Alfred Whitehead** (Άλφρεντ Ουάϊτχεντ, 1861-1947), συνέγρα-

ψαν το τρίτομο έργο *Principia Mathematica (Οι Αρχές των Μαθηματικών)*, στο οποίο ανέπτυξαν τη λεγόμενη "θεωρία των τύπων". Ο τρόπος με τον οποίο οι Ράσελ και Ουάϊτχεντ απέφυγαν τα παράδοξα ήταν με τη συμπερίληψη στο σύστημά τους της "αρχής του φαύλου κύκλου", η οποία έλεγε ότι καμιά οντότητα δεν μπορεί να οριστεί με αναφορά σε μια ολότητα που περιέχει την οντότητα που θέλουμε να ορίσουμε.

Η φορμαλιστική σχολή είχε ως σημαντικότερους εκπροσώπους της το **Richard Dedekind** (Ρίχαρτ Ντέντεκιντ, 1831-1916), το **Giuseppe Peano** (Τζουζέπε Πεάνο, 1858-1932) και το **David Hilbert** (Νταβίντ Χίλμπερτ, 1862-1943). Σκοπός των ερευνών της σχολής αυτής ήταν η κατασκευή αξιωματικών συστημάτων για επί μέρους κλάδους των μαθηματικών, δηλαδή τη γεωμετρία, τη θεωρία αριθμών, τη θεωρία συνόλων κ.λπ. Η βασική επιδίωξη ήταν να αποδειχθεί ότι αυτά τα αξιωματικά συστήματα δεν οδηγούν σε αντιφάσεις. Μάλιστα ο Χίλμπερτ κατέστρωσε το περίφημο "πρόγραμμα του Χίλμπερτ", στόχος του οποίου ήταν η τυποποίηση των μαθηματικών προς αυτή την κατεύθυνση.

Η μαθηματική λογική γνώρισε εκπληκτική ανάπτυξη στον αιώνα μας. Μερικοί από τους σημαντικότερους λογικούς υπήρξαν οι **Leopold Lowenheim** (Λέοπολντ Λέβενχαϊμ, 1878-1957), **Thoralf Skolem** (Θόραλφ Σκόλεμ, 1887-1963), (Άλφρεντ Τάρσκι, 1901-1983), **Alonzo Church** (Αλόνζο Τσερτς, 1903-1995), **Kurt Godel** (Κουρτ Γκέντελ, 1906-1978), **Stephen Kleene** (Στίβεν Κλίνι, 1909-1994). Ειδικά ο Γκέντελ θεωρείται ως ο κορυφαίος λογικός του αιώνα μας, αφού απέδειξε δυο από τα πιο θεμελιώδη θεωρήματα του αιώνα, δηλαδή το "θεώρημα πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού" και το "θεώρημα μη πληρότητας της τυπικής αριθμητικής". Αξιοσημείωτο είναι και το αποτέλεσμα που απέδειξε το 1963 ο **Paul Cohen** (Πωλ Κοέν) ότι το "αξίωμα επιλογής" και η "υπόθεση του συνεχούς" στη Θεωρία Συνόλων είναι προτάσεις ανεξάρτητες από τα συνήθη αξιώματα της θεωρίας αυτής.

Τελειώνοντας πρέπει να αναφέρουμε ότι η μαθηματική λογική έχει αποτελέσει βασικό εργαλείο για πολλούς αναλυτικούς φιλοσόφους της εποχής μας, για παράδειγμα τους **Willard Quine** (Ουίλλαρντ βαν Όρμαν Κουάϊν, 1908-), **Donald Davidson** (Ντόναλντ Ντέιβιντσον, 1917-), **Michael Dummett** (Μάικλ Ντάμετ, 1925-) και **Saul Kripke** (Σωλ Κρίπκε, 1940-).

Τις τελευταίες δεκαετίες υπάρχει αυξημένο ενδιαφέρον από φιλοσόφους, γλωσσολόγους, αλλά και επιστήμονες που ασχολούνται με τη θεμελίωση της επιστήμης των υπολογιστών, για ειδικά θέματα της λογικής όπως είναι η "τροπική λογική" οι "πλειότιμες λογικές", η "επιστημική λογική", η "ασαφής λογική", η "γραμμική λογική" κ.τλ.

κεφάλαιο 2

ΙΙ. Προτασιακή Λογική

1. Γλώσσα, Πρόταση, Αληθοτιμή Πρότασης

Η γλώσσα είναι το κύριο μέσον επικοινωνίας των ανθρώπων και περιλαμβάνει ως εκδηλώσεις της το γραπτό και τον προφορικό λόγο. Σχετικές με τη γλώσσα είναι γνώσεις και δεξιότητες, οι οποίες αναφέρονται:

- στον τρόπο εκφοράς ή συμβολικής αναπαράστασης (γραφής) των ήχων, οι οποίοι σχετίζονται με τον προφορικό λόγο
- στον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι λέξεις για να σχηματίσουν προτάσεις
- στη σημασία των λέξεων και των προτάσεων.

Μια λέξη εκφράζει γλωσσικά (σημαίνει, συμβολίζει) μια έννοια. Η πρόταση είναι μια γλωσσική ενότητα, η οποία εκφράζει κάποιο νόημα. Είναι το γλωσσικό όχημα με το οποίο εκφράζεται μια ιδέα ή μια σκέψη σε σχέση με κάποιες έννοιες.

Στην επικοινωνίας μας με τα άλλα πρόσωπα χρησιμοποιούμε τις προτάσεις με ποικίλους τρόπους. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες εκφράσεις:

1. «ο Γιώργος άνοιξε το παράθυρο»
2. «άνοιξε ο Γιώργος το παράθυρο;»
3. «ας ανοίξει το παράθυρο ο Γιώργος!»
4. «ω, ο Γιώργος άνοιξε το παράθυρο!»

Και οι τέσσερις είναι προτάσεις, οι οποίες εκφέρονται για διαφο-

ρετικό λόγο και με διαφορετικό τρόπο ή κάθε μία. Η πρώτη εκφράζει μια διαβεβαίωση για κάτι. Είναι μια απόφανση, διότι το πρόσωπο το οποίο την εκφέρει αποφαίνεται σχετικά με μια κατάσταση. Η δεύτερη εκφράζει μια ερώτηση. Η τρίτη εκφράζει μια επιθυμία ή προτροπή ή και διαταγή. Η τελευταία συνιστά επιφώνημα θαυμασμού, έκπληξης ή δυσαρέσκειας. Βλέπουμε λοιπόν ότι μπορούμε να διακρίνουμε διάφορα είδη προτάσεων, όπως αποφαντικές ή κρίσης, ερωτηματικές, επιθυμίας, επιφωνηματικές κτλ.Οι απλούστερες αποφαντικές προτάσεις που μπορούν να υπάρξουν περιλαμβάνουν δύο κύριους όρους. Ο ένας είναι το υποκείμενο , δηλαδή η αισθητή ή αφηρημένη ατομικότητα για την οποία γίνεται λόγος. Ο δεύτερος όρος είναι το κατηγόρημα, δηλαδή αυτό το οποίο λέγεται για το υποκείμενο. Στην πρόταση ο *ήλιος είναι λαμπερός*, για παράδειγμα, η λέξη *ήλιος* κατέχει τη θέση του υποκειμένου και η έκφραση *είναι λαμπερός* κατέχει τη θέση του κατηγορήματος. Στην πρόταση *ο ήλιος λάμπει*, η λέξη *ήλιος* κατέχει τη θέση του υποκειμένου, ενώ το ρήμα *λάμπει* κατέχει τη θέση του κατηγορήματος.

Μερικές φορές στο λόγο εμφανίζονται ελλειμματικές ή μη πλήρεις προτάσεις, δηλαδή εκφράσεις, οι οποίες προκύπτουν αν από προτάσεις παραλείψουμε το υποκείμενο ή το κατηγόρημα. Για παράδειγμα, ας δούμε την περίπτωση κατά την οποία μας απευθύνουν την ερώτηση «τι έκανε ο Γιώργος;» Τότε μπορούμε να απαντήσουμε με την έκφραση «άνοιξε το παράθυρο». Αυτή δεν είναι πρόταση γιατί λείπει το υποκείμενο. Στην ομιλία όμως λειτουργεί ως πρόταση. Συνήθως σε αυτές τις περιπτώσεις ο όρος ο οποίος λείπει εννοείται από τα συμφραζόμενα.

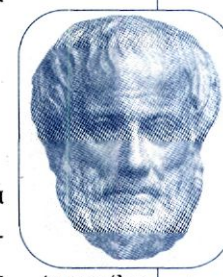
Ας θεωρήσουμε τώρα τα ακόλουθα ζεύγη προτάσεων:

1. «αγαπώ τα ρόδα»
«αγαπώ τα τριαντάφυλλα»
2. «ο Γιώργος και ο Γιάννης παίζουν σκάκι»
«ο Γιάννης και ο Γιώργος παίζουν σκάκι»
3. «ο Πραξιτέλης φιλοτέχνησε το άγαλμα του Ερμή»
«το άγαλμα του Ερμή φιλοτεχνήθηκε από τον Πραξιτέλη»

Η δεύτερη πρόταση του πρώτου ζεύγους προκύπτει από την πρώτη με την αλλαγή μιας λέξης με μια άλλη συνώνυμή της. Η δεύτερη πρόταση του δεύτερου ζεύγους προκύπτει από την πρώτη με την αντιμετάθεση δυο λέξεων.

Η δεύτερη πρόταση του τρίτου ζεύγους προκύπτει από την πρώτη

με την αλλαγή της ενεργητικής φωνής σε παθητική. Παρατηρούμε ότι οι αλλαγές που έχουμε επιφέρει δεν αλλοιώνουν τη σημασία των προτάσεων. Και στις τρεις περιπτώσεις οι δύο προτάσεις λένε ακριβώς το ίδιο πράγμα, εκφράζουν την ίδια σκέψη, με άλλα λόγια έχουν την ίδια σημασία.


Αριστοτέλης

Δυο προτάσεις που έχουν την ίδια σημασία λέγονται ταυτόσημες

Κάθε πρόσωπο παρατηρεί και αντιλαμβάνεται σε κάποιο βαθμό ένα μέρος από τον αισθητό και τον αφηρημένο περιβάλλοντα κόσμο. Το αισθητό περιβάλλον περιλαμβάνει τις ατομικότητες που γίνονται αντιληπτές με τις αισθήσεις του κάθε προσώπου, όπως είναι το σπίτι του, οι φίλοι του, η γάτα του, το μολύβι του, το ίδιο το σώμα του κτλ. Το αφηρημένο περιβάλλον του περιλαμβάνει πραγματικότητες, οι οποίες δεν γίνονται αντιληπτές με τις αισθήσεις, όπως είναι οι σκέψεις του, η ιδεολογία του, οι κοινωνικές συμβάσεις, το θεσμικό πλαίσιο, οι σχέσεις, οι γνώσεις του κτλ. Επικοινωνώντας με άλλα πρόσωπα χρησιμοποιεί τη γλώσσα για να εκφράσει το πώς αντιλαμβάνεται τον περιβάλλοντα κόσμο περιγράφοντας αυτό που προσλαμβάνει, εκφράζοντας τις πεποιθήσεις του γι' αυτό. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιεί αποφαντικές προτάσεις. Λέει, για παράδειγμα, «το αίμα μου είναι κόκκινο» ή «το γρασίδι του κήπου μου είναι μπλε». Με την πρώτη πρόταση περιγράφει μια υφιστάμενη κατάσταση των πραγμάτων του κόσμου, μια όψη του περιβάλλοντος κόσμου, η οποία υπάρχει, μια πραγματικότητα. Με τη δεύτερη περιγράφει μια κατάσταση των πραγμάτων, η οποία δεν υφίσταται δεν είναι πραγματική. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η πρόταση είναι αληθής και στη δεύτερη ότι είναι ψευδής.

Χαρακτηρίζουμε **αληθή** κάθε αποφαντική πρόταση, η οποία περιγράφει μια πραγματική κατάσταση του κόσμου μας. Χαρακτηρίζουμε **ψευδή** κάθε αποφαντική πρόταση, η οποία περιγράφει μια μη υπαρκτή κατάσταση των πραγμάτων. Αν μια αποφαντική πρόταση είναι αληθής λέμε ότι έχει τιμή αληθείας ή αληθοτιμή Α. Αν είναι ψευδής λέμε ότι έχει τιμή αληθείας ή αληθοτιμή Ψ. Λέμε ότι δύο αποφαντικές προτάσεις έχουν αντίθετες τιμές αληθείας όταν η μια είναι αληθής και η άλλη ψευδής, για παράδειγμα, «ο ήλιος λάμπει σήμερα» και «ο ήλιος δεν λάμπει σήμερα».

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η γενικώς αποδεκτή πεποίθηση σχετικά με τον κόσμο μας είναι πως μια κατάσταση των πραγμάτων ή

υφίσταται ή δεν υφίσταται και δεν υπάρχει τρίτη περίπτωση. Αυτό οδηγεί στην άποψη ότι μια αποφαντική πρόταση, η οποία εκφέρεται με αξιώσεις περιγραφής μιας όψης του κόσμου μας, δεν μπορεί παρά να είναι ή μόνον αληθής, ή μόνον ψευδής.

Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε πρόταση εννοούμε μια αποφαντική πρόταση, η οποία είναι ή αληθής ή ψευδής. Έτσι, η λογική την οποία ακολουθούμε και περιγράφουμε από εδώ και στο εξής είναι μια λογική η οποία περιέχει μόνον δυο τιμές αληθείας, αυτές της αλήθειας και του ψεύδους.

Μια τέτοια λογική λέγεται δίτιμη.

Παρατήρηση

Δύο ταυτόσημες προτάσεις επειδή εκφράζουν ακριβώς το ίδιο πράγμα, περιγράφουν την ίδια κατάσταση και συνεπώς έχουν την ίδια αληθοτιμή.

Παράδειγμα

Να εξετάσουμε αν οι ακόλουθες εκφράσεις είναι προτάσεις. Ποιες είναι αληθείς και ποιες είναι ψευδείς;

1. Το 100 είναι μεγαλύτερο του 10.
2. Το Παρίσι είναι πρωτεύουσα της Αγγλίας.
3. Ο Μέγας Αλέξανδρος πέθανε από τύφο.
4. Ο Γιώργος και ο Γιάννης ψιλονίκησαν.
5. Αυτός είναι ψηλότερος από 2 μέτρα.

Απάντηση

Όπως είπαμε, από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε σε πρόταση, εννοούμε αποφαντική πρόταση, η οποία είναι ή αληθής ή ψευδής αποκλείοντας την περίπτωση να είναι συγχρόνως αληθής και ψευδής. Έχοντας αυτό στο νου μας μπορούμε να πούμε τα ακόλουθα.

Η πρώτη έκφραση είναι πρόταση με τιμή αληθείας Α.

Η δεύτερη είναι επίσης πρόταση με αληθοτιμή Ψ.

Η τρίτη είναι πρόταση διότι περιγράφει μια κατάσταση, η οποία υφίσταται ή είναι ανυπόστατη. Δηλαδή είναι μια αποφαντική πρόταση, η οποία αναγκαστικά είναι αληθής ή ψευδής. Όμως παρουσιάζει την ιδιορρυθμία του ότι είναι τέτοια η φύση των πραγμάτων που περιγράφει, ώστε δεν είμαστε σε θέση να αποφανθούμε σχετικά με το ποια είναι η τιμή αληθείας της διότι δεν γνωρίζουμε από τι πέθανε στην πραγματικότητα ο Μέγας Αλέξανδρος.

Η τέταρτη έκφραση φαίνεται κατ' αρχήν πως είναι πρόταση διότι αυτό που περιγράφει φυσιολογικά θα πρέπει να ισχύει ή να μην ισχύει. Όμως τι ακριβώς περιγράφει; Μας λέει ότι ο Γιάννης φιλονίκησε με τον Γιώργο ή ότι ο καθένας τους φιλονίκησε με κάποιο άλλο άτομο (ή άτομα); Καθώς δεν είμαστε βέβαιοι για το τι λέγει η έκφραση, δεν έχει νόημα να εξετάζουμε αν αυτή είναι πρόταση ή όχι. Είναι φανερό, ότι εδώ εμφανίζεται μια συντακτική αβεβαιότητα, η οποία μπορεί να αρθεί με κατάλληλη επαναδιατύπωση/επανασύνταξη της πρότασης.

Η πέμπτη έκφραση επίσης φαίνεται κατ' αρχήν πως είναι πρόταση διότι αυτό που περιγράφει είναι μια κατάσταση, η οποία υφίσταται ή δεν υφίσταται. Όμως περιγράφει μια κατάσταση σχετική με ποιον; Σε ποιον αναφέρεται η έκφραση; Εδώ υφίσταται αβεβαιότητα ως προς τη σημασία της έκφρασης, η οποία οφείλεται στο γεγονός πως η λέξη *αυτός* δεν έχει καθορισμένη σημασία καθώς δεν γνωρίζουμε σε ποιον αναφέρεται. Συνεπώς, δεν έχει νόημα να ρωτάμε αν αυτή η έκφραση είναι πρόταση. Αν όμως αυτή τοποθετηθεί σε ένα πλαίσιο, το οποίο προσδίδει καθορισμένη σημασία στην λέξη *αυτός*, τότε η έκφραση καθίσταται πρόταση. Για παράδειγμα, στο ακόλουθο κείμενο έχουμε μια περίπτωση, όπου η έκφραση αυτή καθίσταται πρόταση: «Ο Αναγνωστόπουλος είναι αρχηγός της ομάδας. Θα την οδηγήσει την Κυριακή στη νίκη. Αυτός είναι ψηλότερος από 2 μέτρα». Συχνά όταν συναντούμε τέτοιου είδους εκφράσεις θεωρούμε πως είναι προτάσεις υπονοώντας ότι υπάρχει ένα πλαίσιο, το οποίο καταργεί τη σημασιολογική αβεβαιότητα.

Ερωτήσεις

1. Στη λογική, τι εννοούμε με τον όρο πρόταση;
2. Τι σημαίνει ότι μια πρόταση έχει αληθοτιμή Ψ;
3. Πότε λέμε ότι μια πρόταση είναι αληθής;
4. Πότε λέμε ότι δύο προτάσεις είναι ταυτόσημες;

Ασκήσεις

1. Από τις ακόλουθες εκφράσεις να επισημάνετε αυτές που είναι προτάσεις και να βρείτε την αληθοτιμή τους.
   i. Σου αρέσει η λογική;
   ii. Αν στο δύο προσθέσουμε τρία θα πάρουμε τέσσερα.
   iii. Ο Γαλαξίας μας περιλαμβάνει $10^9 + 153$ άτομα.
   iv. Η δεύτερη έκφραση αυτής της άσκησης περιέχει 9 λέξεις.
   v. Η τέταρτη έκφραση αυτής της άσκησης είναι πρόταση.
   vi. Η πέμπτη έκφραση αυτής της άσκησης είναι ψευδής πρόταση.
   vii. Βρείτε τις προτάσεις αυτής της άσκησης!
2. Στην αρχαιότητα υπήρχαν φιλόσοφοι όπως ο Κρατύλος, οι οποίοι υποστήριζαν ότι τα πάντα είναι ψευδή. Ο Σέξτος Εμπειρικός λέει γι' αυτούς: «όσον αφορά βεβαίως σε εκείνους που χαρακτηρίζουν τα πάντα ψευδή, δείξαμε προηγουμένως ότι ο ισχυρισμός τους ανατρέπεται. Διότι, αν τα πάντα είναι ψευδή, ψεύδος θα είναι και το «τα πάντα είναι ψευδή» αφού είναι ένα από τα πάντα...». (Προς Λογικούς Β' 55, 3-6). Ας πάρουμε την έκφραση. Α: «κάθε πρόταση είναι ψευδής». Αν δεχτούμε ότι αυτή είναι πρόταση, τότε ποια πρέπει να είναι η αληθοτιμή της; Τι συμπεραίνετε σχετικά με τον ισχυρισμό των προαναφερθέντων φιλοσόφων;
3. Παλιά ο δρόμος που οδηγούσε από την Αθήνα στη Θήβα σε κάποιο σημείο χωριζόταν σε τρεις δρόμους από τους οποίους μόνον ο ένας οδηγούσε στη Θήβα. Η Σφίγγα είχε βάλει στην αρχή του κάθε δρόμου μια πινακίδα. Όλοι γνώριζαν ότι ως ψιλοπαίγμων έγραφε την αλήθεια το πολύ σε μια από τις πινακίδες. Η πινακίδα του πρώτου δρόμου έγραφε: «Αυτός ο δρόμος οδηγεί στη Θήβα». Η πινακίδα του δεύτερου δρόμου έγραφε: «Αυτός ο δρόμος δεν οδηγεί στη Θήβα». Η πινακίδα του τρίτου δρόμου έγραφε: «Ο πρώτος δρόμος δεν οδηγεί στη Θήβα». Ο Οιδίποδας δυστυχώς είχε βρει αμέσως το δρόμο που οδηγούσε στη Θήβα. Ποιος ήταν αυτός;
4. Ο Επιμενίδης έλεγε ψέματα κάθε Δευτέρα, Τετάρτη και Παρασκευή, ενώ τις υπόλοιπες μέρες έλεγε την αλήθεια. Ο Κρατύλος έλεγε ψέματα κάθε Τρίτη, Πέμπτη και Σάββατο, ενώ τις υπόλοιπες μέρες έλεγε την αλήθεια. Μια μέρα που έκαναν τον περίπατό

τους στην αγορά τους συνάντησε ο Χρύσιππος που δεν τους γνώριζε και τους ζήτησε να του πουν τα ονόματά τους. Τότε ο ένας είχε απαντήσει: «είμαι ο Επιμενίδης» και ο άλλος είχε απαντήσει: «είμαι ο Κρατύλος». Τι μέρα ήταν;

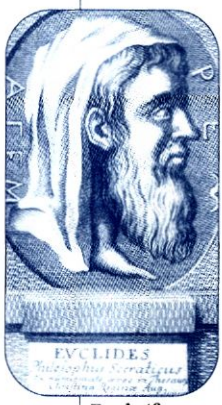
5. Ο Επιμενίδης, ο οποίος καταγότανε από την Κρήτη, έλεγε: «Όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες». Μπορεί αυτή η απόφανσή του να είναι πρόταση;

2. Σύνδεσμοι, Πίνακες Αληθοτιμών

Ας υποθέσουμε ότι ο Γιώργος κάθεται στο γραφείο του από το οποίο δε βλέπει έξω και ο Γιάννης βρίσκεται μπροστά στο παράθυρο. Ο Γιώργος ρωτάει τον Γιάννη: «πώς είναι ο καιρός;». Ο Γιάννης βλέπει από το παράθυρο ότι δεν υπάρχουν σύννεφα στον ουρανό. Από την κίνηση των φυλλωμάτων καταλαβαίνει ότι φυσάει ένα ελαφρύ βοριαδάκι. Λέει στον Γιάννη: «ο ουρανός είναι ξάστερος και φυσάει βοριαδάκι». Αυτή είναι μια πρόταση με την οποία ο Γιάννης περιγράφει τον καιρό. Παρατηρούμε όμως ότι συντίθεται από δύο εκφράσεις: «ο ουρανός είναι ξάστερος», «φυσάει βοριαδάκι», οι οποίες συνδέονται με τη λέξη *και*. Κάθε μια από αυτές είναι πρόταση, που περιγράφει μια όψη μόνον της κατάστασης του καιρού. Η σύνδεσή τους με τη λέξη *και* δημιουργεί μια νέα πρόταση, η οποία πλέον περιγράφει την κατάσταση του καιρού στο σύνολό της. Αυτό το φαινόμενο είναι συνηθισμένο κατά τη χρήση της γλώσσας. Πολύ συχνά χρησιμοποιούμε λέξεις ή διατάξεις λέξεων, οι οποίες δεν συνιστούν προτάσεις, αλλά καθώς συμπλέκονται με μια ή περισσότερες προτάσεις δημιουργούν συνθετότερες προτάσεις. Συνήθως ονομάζονται σύνδεσμοι. Αυτοί συντακτικά εμφανίζονται ως διαδοχή λέξεων και κενών. Όταν τα κενά συμπληρωθούν με προτάσεις, το σύνολο συνιστά μια νέα πρόταση. Για παράδειγμα, η διαδοχή «είτε... είτε...» είναι ένας σύνδεσμος. Αν στη θέση του πρώτου κενού τοποθετήσουμε την πρόταση «το τρίγωνο ΑΒΓ είναι σκαληνό» και στη θέση του δεύτερου κενού την πρόταση «το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές» παίρνουμε μια νέα πρόταση «είτε το τρίγωνο

ΑΒΓ είναι σκαληνό είτε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές».

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των αληθοτιμών των προτάσεων που συμπλέκονται με συνδέσμους και της αληθοτιμής της πρότασης που προκύπτει.



Ευκλείδης

Ας υποθέσουμε ότι ο Γιώργος και ο Γιάννης εργάζονται στον τρίτο όροφο του κτιρίου μιας εταιρίας. Ο Γιώργος είναι υπεύθυνος του τμήματος παραγγελιών που περιλαμβάνει δύο γραφεία στο δεύτερο όροφο, στα οποία εργάζονται ο Κώστας και ο Νίκος. Καθώς θέλει να δει πως προχωράει μια επείγουσα εργασία, στέλνει τον Γιάννη στο τμήμα παραγγελιών για να μάθει τι γίνεται λέγοντάς του: «πήγαινε στις παραγγελίες και έλα να μου πεις –με μια πρόταση σε παρακαλώ– τι γίνεται». Ο Γιάννης γυρίζει και του περιγράφει την υφισταμένη κατάσταση στο τμήμα παραγγελιών με την πρόταση;

(1) «ούτε ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του ούτε ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο».

Η πρόταση αυτή προκύπτει από δύο άλλες απλούστερες

(2) «ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του» και

(3) «Ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο»,

οι οποίες συνδέονται με το σύνδεσμο «ούτε... ούτε...»

Ας εξετάσουμε πότε η πρόταση (1) περιγράφει την κατάσταση του τμήματος παραγγελιών και πότε όχι. Δηλαδή ας δούμε πότε η (1) είναι αληθής και πότε ψευδής. Οι δύο προτάσεις που τη συνθέτουν μπορεί να είναι αληθείς ή ψευδείς. Οι συνδυασμοί των αληθοτιμών τους είναι οι ακόλουθοι.

- Η (2) είναι αληθής και η (3) είναι αληθής. Σε αυτήν την περίπτωση ο Κώστας και ο Νίκος βρίσκονται στα γραφεία τους και επομένως η πρόταση (1) δεν περιγράφει την κατάσταση του τμήματος παραγγελιών. Συνεπώς είναι ψευδής.
- Η (2) είναι αληθής και η (3) είναι ψευδής. Σε αυτήν την περίπτωση ο Νίκος δε βρίσκεται στο γραφείο του, αλλά βρίσκεται ο Κώστας στο δικό του. Συνεπώς η (1) δεν περιγράφει την κατάσταση στο τμήμα παραγγελιών, δηλαδή είναι ψευδής.
- Η (2) είναι ψευδής και η (3) είναι αληθής. Σε αυτήν την περίπτωση ο Νίκος βρίσκεται στο γραφείο του, αλλά ο Κώστας όχι. Συνεπώς η (1) δεν περιγράφει την κατάσταση του τμήματος παραγγελιών και επομένως είναι ψευδής.
- Η (2) είναι ψευδής και η (3) είναι ψευδής. Σε αυτήν την περίπτωση ο Κώστας δε βρίσκεται στο γραφείο του και ο Νίκος επί-

σης δε βρίσκεται στο δικό του. Επομένως η (1) περιγράφει την κατάσταση του τμήματος παραγγελιών, δηλαδή είναι αληθής.

Αυτές τις τέσσερις δυνατές περιπτώσεις τις συνοψίζουμε στον εξής πίνακα:

Πίνακας 1

Ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο	Ο Νίκος βρίσκεται στο δικο του γραφείο	Ούτε ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του ούτε ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο
αληθής	αληθής	ψευδής
αληθής	ψευδής	ψευδής
ψευδής	αληθής	ψευδής
ψευδής	ψευδής	αληθής

Παρατηρούμε ότι η πρόταση (1) είναι αληθής μόνον στην περίπτωση όπου και οι δύο προτάσεις (2) και (3) είναι ψευδείς. Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα καταλήγουμε αν συμπληρώσουμε τα δύο κενά του συνδέσμου «ούτε... ούτε...» με οποιοδήποτε ζεύγος προτάσεων. Βλέπουμε λοιπόν ότι η αληθοτιμή της πρότασης που προκύπτει δεν εξαρτάται από τη σημασία, το εννοιολογικό περιεχόμενο των δύο προτάσεων, το τι περιγράφουν ή το ποια είναι η σχέση τους, αλλά μόνον από τις αληθοτιμές τους.

Αν τα κενά ενός συνδέσμου είναι δύο, λέμε ότι ο σύνδεσμος είναι διθέσιος ή διμελής. Αν έχει ένα κενό λέμε ότι είναι μονοθέσιος ή μονομελής.

Τριθέσιοι, τετραθέσιοι κ.τλ. σύνδεσμοι είναι δυνατό να υπάρξουν, αλλά είναι δύσχρηστοι και έτσι συνήθως εξετάζουμε τους μονοθέσιους και τους διθέσιους.

Εκτός από το διθέσιο σύνδεσμο που μελετήσαμε στα προηγούμενα υπάρχουν και άλλοι. Χαρακτηριστική τους ιδιότητα είναι το ότι η συμπλήρωση των κενών τους με προτάσεις παράγει μια πρόταση, της οποίας η αληθοτιμή εξαρτάται μόνον από τις αληθοτιμές αυτών και όχι από τη σημασία τους ή τη σχέση τους. Η **λογική συμπεριφορά** κάθε ενός διθέσιου συνδέσμου, δηλαδή **η σχέση που συνδέει τις αληθοτιμές των συνδεομένων προτάσεων με τις αληθοτιμές της παραγόμενης σύνθετης πρότασης**, περιγράφεται από έναν πίνακα αληθοτιμών, ο οποίος περιέχει τρεις στήλες και τέσσερις γραμμές. Η πρώτη στήλη

αντιστοιχεί στην πρόταση που πληροί το πρώτο κενό του συνδέσμου. Η δεύτερη αντιστοιχεί στην πρόταση που πληροί το δεύτερο κενό. Η τρίτη αντιστοιχεί στη σύνθετη πρόταση που προκύπτει. Σε κάθε γραμμή στις δύο πρώτες θέσεις έχουμε ένα από τους τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς αληθοτιμών, ενώ στην τρίτη θέση έχουμε την αληθοτιμή που αντιστοιχεί στη σύνθετη πρόταση για αυτό το συνδυασμό αληθοτιμών. Για παράδειγμα ο πίνακας αληθείας του συνδέσμου «ούτε... ούτε...», όπως προκύπτει από τον πίνακα 1, είναι ο ακόλουθος:

Πίνακας 2

		ούτε... ούτε...
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Με πόσους όμως τρόπους είναι δυνατό να συμπληρωθεί με αληθοτιμές η τρίτη στήλη ενός τέτοιου πίνακα; Επειδή υπάρχουν δύο αληθοτιμές, Α και Ψ, είναι φανερό πως η πρώτη γραμμή της τρίτης στήλης μπορεί να συμπληρωθεί με δύο τρόπους. Αν λοιπόν η πρώτη γραμμή έχει συμπληρωθεί με Α, τότε η δεύτερη γραμμή της τρίτης στήλης μπορεί να έχει συμπληρωθεί με Α ή Ψ, δηλαδή με δύο τρόπους. Αν η πρώτη γραμμή της τρίτης στήλης έχει συμπληρωθεί με Ψ, τότε η δεύτερη γραμμή της τρίτης στήλης μπορεί να έχει συμπληρωθεί με Α ή Ψ, δηλαδή με δύο τρόπους επίσης. Έτσι, οι δύο πρώτες γραμμές της τρίτης στήλης μπορούν να συμπληρωθούν με τέσσερις τρόπους. Τώρα για κάθε έναν από τους τέσσερις τρόπους με τους οποίους έχουν συμπληρωθεί οι δύο πρώτες γραμμές της τρίτης στήλης, η τρίτη γραμμή μπορεί να συμπληρωθεί με δύο τρόπους, Α ή Ψ. Επομένως, οι τρεις πρώτες γραμμές της τρίτης στήλης μπορούν να συμπληρωθούν με 4.2=8 τρόπους. Τέλος, για κάθε έναν από τους οκτώ τρόπους με τους οποίους έχουν συμπληρωθεί οι τρεις πρώτες γραμμές της τρίτης στήλης, η τέταρτη γραμμή μπορεί να συμπληρωθεί με δύο τρόπους, Α ή Ψ. Συνεπώς, οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να συμπληρωθούν και οι τέσσερις γραμμές είναι 8.2=16. Όλοι αυτοί οι τρόποι φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα. Οι δύο πρώτες στήλες αντιστοιχούν στις αληθοτιμές των δύο προτάσεων και οι υπόλοιπες στήλες στις δυνατές αληθοτιμές της σύνθετης πρότασης που θα μπορούσε να προκύψει από τη σύνδεση των δύο προτάσεων.

Πίνακας 3

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α`	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ

Συνεπώς, μπορούν να υπάρξουν το πολύ 16 τρόποι λογικής σύνδεσης δύο προτάσεων, λαμβάνοντας υπόψη και τη σειρά με την οποία συνδέονται αυτές. Δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν το πολύ 16 σύνδεσμοι. Η λογική συμπεριφορά τους περιγράφεται από τον πίνακα 3, ο οποίος παρατίθεται εδώ όχι προς αποστήθιση, αλλά για να υπάρχει μια συνολική εικόνα της λειτουργίας των συνδέσμων.

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε σύνδεσμο;
2. Να αναφέρετε μια χαρακτηριστική ιδιότητα των διθέσιων συνδέσμων.
3. Τι περιγράφει ο πίνακας αληθείας ενός συνδέσμου;

Ασκήσεις

1. Να εντοπίσετε τους συνδέσμους που παράγουν τις ακόλουθες προτάσεις.
   i. Δεν είναι αληθές πως ο Κιθαιρώνας είναι ψηλότερος από την Οίτη.
   ii. Το τρίγωνο είναι ισοσκελές αν έχει δύο ίσες γωνίες
   iii. Θα πάω στο σχολείο αν και έχω πυρετό.
   iv. Θα πάω περίπατο μόνον εφόσον δεν βρέχει.
   v. Θα διαβάσω και μετά θα δω τηλεόραση.
   vi. Ο Γιώργος βρίσκεται στην τάξη του αλλά δεν βρίσκεται ο καθηγητής του εκεί.
2. Να καταστρώσετε τον πίνακα αληθείας για τον κάθε ένα από τους ακόλουθους συνδέσμους.
   i. «είναι αλήθεια ότι...»
   ii. «δεν είναι... και δεν είναι...»

3. Συμβολική Γλώσσα, Προτασιακές Μεταβλητές

Σε όσα είπαμε στα προηγούμενα είναι φανερό πως υπάρχει μια δυσκολία σε σχέση με τον τρόπο με τον οποίο αναφερόμαστε στις προτάσεις ή στους συνδέσμους. Μιλάμε για προτάσεις που πληρούν τα κενά των συνδέσμων, για σύνθετες προτάσεις που προκύπτουν αν συμπληρώσουμε τα κενά ενός συνδέσμου, για το πρώτο κενό, το δεύτερο κενό του συνδέσμου κτλ. Χρησιμοποιούμε πολλά λόγια με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ασάφειες και να προκαλείται κόπωση. Για να αποφύγουμε αυτά τα προβλήματα καταφεύγουμε σε μια λύση που θυμίζει κατά κάποιον τρόπο την καθομιλουμένη γλώσσα. Στη συνηθισμένη χρήση της γλώσσας όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε συγκεκριμένες ατομικότητες αντί να τις περιγράφουμε περιφραστικά χρησιμοποιούμε ονόματα, όπως για παράδειγμα Κώστας, Γιάννης, Γιώργος κτλ. ιδιαιτέρως μάλιστα όταν δε μας ενδιαφέρουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους. Με τον ίδιο τρόπο επιλέγουμε να δηλώνουμε με πολύ απλά «ονόματα» τις προτάσεις που χρησιμοποιούμε. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε ορισμένα γράμματα της αλφαβήτου, όπως τα: Π,Ρ,Σ,Τ μερικές φορές μάλιστα με την προσθήκη δεικτών, για παράδειγμα $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$, κτλ. Για παράδειγμα, στα προηγούμενα χρησιμοποιήσαμε την πρόταση «ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του» πολλές φορές. Σε πολλά από τα σημεία όπου αναφερόμασταν σε αυτήν την παραθέταμε ολόκληρη. Αυτό μπορούμε να το αποφύγουμε με τον εξής τρόπο: Επιλέγουμε ένα γράμμα, για παράδειγμα το Π, και συμφωνούμε ότι αυτό το γράμμα θα δηλώνει (συμβολίζει, αναπαριστά) την πρόταση αυτή. Δηλαδή, κάθε φορά που θέλουμε να αναφερθούμε σε αυτήν δεν θα την παραθέτουμε ολόκληρη, αλλά θα χρησιμοποιούμε το Π ως όνομά της. Αντί να χρησιμοποιούμε την έκφραση:

η πρόταση «ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του»

χρησιμοποιούμε την έκφραση:

η πρόταση Π.

Αν θελήσουμε να αναφερθούμε στην πρόταση «Ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο», τότε επιλέγουμε ένα άλλο γράμμα, για παράδειγμα το Ρ, και το χρησιμοποιούμε για να αναφερόμαστε σε αυτήν. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνουμε μιαν αντιστοιχία μεταξύ των δύο προτάσεων και των δύο γραμμάτων, η οποία βεβαίως είναι προσωρινή

και αναφέρεται μόνο στο σαφώς καθορισμένο πλαίσιο της διαπραγμάτευσης που κάνουμε εδώ σχετικά με το ζήτημα του συμβολισμού. Σε μιαν άλλη περίπτωση είναι δυνατό να αντιστοιχίσουμε το Π σε άλλη πρόταση. Η αντιστοιχία αυτή σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο συζήτησης λειτουργεί αμφίδρομα. Δηλαδή, όπου συναντούμε το *P* θα σκεφτόμαστε ότι αυτό έχει τη σημασία: «*ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο*». Και αντιστρόφως όπου συναντούμε την πρόταση αυτή ή όπου θέλουμε να αναφερθούμε σε αυτήν, μπορούμε να χρησιμοποιούμε στη θέση της το *P*.

Υπάρχει όμως και μια άλλη πλευρά του ζητήματος του συμβολισμού των προτάσεων με τη βοήθεια γραμμάτων. Συχνά θέλουμε να αναφερθούμε σε πράγματα που αφορούν στις προτάσεις ανεξαρτήτως του περιεχομένου τους. Δηλαδή, να αναφερθούμε σε πράγματα που σχετίζονται με το γεγονός ότι είναι προτάσεις. Για παράδειγμα, μπορεί να χρειαστεί να πούμε κάτι όπως το εξής: *Αν συμπληρώσουμε το πρώτο κενό του συνδέσμου «ούτε... ούτε...» με μια πρόταση και το δεύτερο με μιαν άλλη πρόταση, τότε για να είναι η πρόταση που παίρνουμε αληθής πρέπει και η πρώτη και η δεύτερη πρόταση να είναι αληθείς.* Τέτοιους πλατειασμούς μπορούμε να τους αποφύγουμε με τον εξής τρόπο. Αντί να χρησιμοποιούμε την έκφραση *πρώτη πρόταση* επιλέγουμε να χρησιμοποιούμε το γράμμα, Τ, για παράδειγμα, και αντί την έκφραση *δεύτερη πρόταση*, το γράμμα Σ. Τότε η παραπάνω έκφραση μπορεί να διατυπωθεί συντομότερα ως εξής: *Αν συμπληρώσουμε το πρώτο κενό του συνδέσμου «ούτε... ούτε...» με το Τ και το δεύτερο με Σ, τότε για να είναι η πρόταση που παίρνουμε αληθής πρέπει οι Τ και Σ να είναι αληθείς.* Εδώ τα γράμματα Τ και Σ μπορούν να θεωρηθούν ως σύμβολα δυο οποιωνδήποτε προτάσεων με την έννοια πως ό,τι λέμε για αυτά είναι σαν να το λέμε για οποιαδήποτε πρόταση. Αν σε οποιαδήποτε έκφραση που έχει διατυπωθεί με τη χρήση των Τ και Σ τοποθετήσουμε στη θέση τους δύο οποιεσδήποτε συγκεκριμένες προτάσεις, τότε η έκφραση αυτή αποκτά συγκεκριμένη σημασία. Για άλλο ζεύγος προτάσεων η έκφραση αποκτά άλλη σημασία κοκ. Συνεπώς, μπορούμε να αντικαθιστούμε τα γράμματα αυτά με διαφορετική πρόταση κάθε φορά. Δηλαδή, έχουμε τη δυνατότητα της συνεχούς μεταβολής των προτάσεων που αντικαθιστούν τα γράμματα ανάλογα με τις ανάγκες μας. Για το λόγο αυτό τα γράμματα που χρησιμοποιούμε ως σύμβολα προτάσεων τα καλούμε **προτασιακές μεταβλητές.** Λειτουργούν με τρόπο ανάλογο προς τις μεταβλητές που χρησιμοποιούμε στα

Μαθηματικά, όπου στη θέση τους μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιουσδήποτε αριθμούς.

Με ανάλογο τρόπο επιλέγουμε διάφορα απλά σύμβολα για να αναφερόμαστε στους συνδέσμους. Έτσι, για το σύνδεσμο «ούτε ... ούτε...» που μελετήσαμε στα προηγούμενα επιλέγουμε το σύμβολο ↓ για να αναφερόμαστε σε αυτόν. Αν είναι Τ και Σ δύο προτασιακές μεταβλητές, τότε κατασκευάζουμε τη συμβολική έκφραση Τ ↓ Σ και συμφωνούμε για αυτήν το εξής: Αν θεωρήσουμε ότι το Τ είναι το σύμβολο μιας πρότασης και το Σ μιας άλλης, τότε θεωρούμε ότι η πρόταση που δημιουργείται αν τις συνδέσουμε με το σύνδεσμο «ούτε... ούτε...» έχει ως σύμβολο την Τ ↓ Σ.

Αν στη θέση του Τ βάλουμε την πρόταση «ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του» και στη θέση του Σ την πρόταση «Ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο», τότε η έκφραση Τ ↓ Σ αντιστοιχεί (συμβολίζει, δηλώνει) στην πρόταση «ούτε ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του ούτε ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο». Αν στη θέση του Τ βάλουμε την πρόταση «το φαγητό είναι ζεστό» και στη θέση του Σ την πρόταση «το κρασί είναι κρύο», τότε η έκφραση Τ ↓ Σ αντιστοιχεί στην πρόταση «ούτε το φαγητό είναι ζεστό ούτε το κρασί είναι κρύο».

Τη χρήση των προτασιακών μεταβλητών και των συμβόλων για τους συνδέσμους επιτρέπει το γεγονός πως η λογική συμπεριφορά των συνδέσμων δεν εξαρτάται από τη σημασία των προτάσεων που συνδέονται με τη βοήθειά τους, αλλά από την αληθοτιμή τους. Έτσι, μελετώντας τους συνδέσμους δε χρειάζεται να χειριζόμαστε κάθε φορά συγκεκριμένες προτάσεις, αλλά σύμβολα προτάσεων.

Πρέπει να προσέξουμε ιδιαιτέρως το γεγονός ότι οι προτασιακές μεταβλητές δεν είναι προτάσεις, αλλά είναι τα σύμβολα προτάσεων. Επίσης, η έκφραση Τ ↓ Σ δεν είναι πρόταση, αλλά το σύμβολο μιας πρότασης, η οποία προκύπτει κάθε φορά που στη θέση των Π και Ρ μπαίνουν κάποιες προτάσεις. Πρέπει να προσέξουμε ακόμα το ότι οι **προτασιακές μεταβλητές δεν έχουν τιμές αληθείας** διότι δεν είναι προτάσεις. Τα Π και Ρ, για παράδειγμα, δεν είναι δυνατό να χαρακτηρισθούν με τους όρους «αληθής» ή «ψευδής» Στα σύμβολα αυτά όμως μπορούμε να λέμε ότι αντιστοιχίζουμε τιμές αληθείας με την εξής έννοια: Αντί να λέμε, για παράδειγμα, ότι στη θέση του Π βάζουμε μια αληθή πρόταση, λέμε ότι στο Π αντιστοιχίζουμε την αληθοτιμή Α.

Μετά από όσα είπαμε γίνεται φανερό πως παράλληλα με την καθομιλουμένη γλώσσα έχουμε εισαγάγει κάποια στοιχεία μιας γλώσσας τε-

χνητής, συμβολικής, την οποία στη συνέχεια εμπλουτίζουμε και με άλλα σύμβολα.

Τη γλώσσα αυτήν τη χαρακτηρίσαμε *τεχνητή* για να την αντιδιαστείλουμε προς τη γλώσσα που ομιλούμε, η οποία κατά κάποιο τρόπο αποτελεί το φυσικό τρόπο επικοινωνίας, η οποία είναι η φυσική γλώσσα. Η συμβολική και η φυσική γλώσσα συσχετίζονται καθώς από τη μια μπορούμε να μεταβαίνουμε στην άλλη, αντιστοιχίζοντας ή μεταφράζοντας τις εκφράσεις της μιας σε εκφράσεις της άλλης. Ας δούμε εδώ με συντομία το πώς λειτουργεί αυτή η μετάβαση από τη μια γλώσσα στην άλλη. Λεπτομερέστερα θα την εξέτασουμε σε επόμενη ενότητα.

Leibniz

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την έκφραση «ούτε το βιβλίο βρίσκεται στο ράφι ούτε το στυλό στο γραφείο». Κατ' αρχήν διαπιστώνουμε ότι αυτή μπορεί να συμπληρωθεί ώστε να καταστεί η ταυτόσημη πρόταση «ούτε το βιβλίο βρίσκεται στο ράφι ούτε το στυλό βρίσκεται στο γραφείο» για να γίνει φανερή η δομή της. Έτσι, βλέπουμε ότι πρόκειται για μια πρόταση, η οποία παράγεται από τη δράση του συνδέσμου «ούτε... ούτε...» σε δύο προτάσεις. Η πρώτη από αυτές είναι η «το βιβλίο βρίσκεται στο ράφι» Η δεύτερη είναι «το στυλό βρίσκεται στο γραφείο». Τώρα είναι φανερό πως η πρόταση αυτή αντιστοιχεί στην έκφραση Π ↓ Ρ της συμβολικής γλώσσας, όπου το Π αντιστοιχεί στην πρόταση και το Ρ στη δεύτερη.

Αντιστρόφως, αν πάρουμε την έκφραση Π ↓ Ρ της συμβολικής γλώσσας και θέσουμε στη θέση του Π την πρόταση «το βιβλίο βρίσκεται στο ράφι» και στη θέση του Ρ την πρόταση «το στυλό βρίσκεται στο γραφείο», τότε, λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύμβολο ↓ αναπαριστά το σύνδεσμο «ούτε... ούτε...», η έκφραση αυτή γίνεται η πρόταση «ούτε το βιβλίο βρίσκεται στο ράφι ούτε το στυλό βρίσκεται στο γραφείο».

Παρατηρούμε λοιπόν ότι μια έκφραση της συμβολικής γλώσσας αποτελεί κατά κάποιο τρόπο μια γεννήτρια εκφράσεων της φυσικής γλώσσας, καθώς αντικαθιστώντας τα σύμβολα που περιέχει με εκφράσεις της φυσικής γλώσσας παίρνουμε μια έκφραση της φυσικής γλώσσας. Και αντίστροφα, εκφράσεις της φυσικής γλώσσας ανάγονται σε εκφράσεις της συμβολικής γλώσσας. Πρέπει να πούμε ότι η συμβολική έκφραση που αντιστοιχεί σε μια έκφραση της φυσικής γλώσσας, δηλαδή η συμβολική γεννήτριά της, ουσιαστικά αποκαλύπτει τη δομή της, διαμέσου της οποίας μπορούμε να μελετήσουμε τη λογική συμπεριφορά της.

Αυτή η συσχέτιση των εκφράσεων της φυσικής και της συμβολικής γλώσσας, και ειδικότερα η παραγωγή εκφράσεων της φυσικής γλώσσας από εκφράσεις της συμβολικής γλώσσας, υπακούει στους εξής βασικούς κανόνες.

- Αν σε μια έκφραση της συμβολικής γλώσσας εμφανίζεται το ίδιο σύμβολο δύο ή περισσότερες φορές, τότε στη θέση όλων των εμφανίσεών του πρέπει να τοποθετείται η ίδια έκφραση της φυσικής γλώσσας.
- Αν σε μια έκφραση της φυσικής γλώσσας μια πρόταση εμφανίζεται δύο ή περισσότερες φορές ή εμφανίζονται ταυτόσημες μεταξύ τους προτάσεις, τότε όλες οι εμφανίσεις της ίδιας πρότασης ή όλες οι ταυτόσημες προτάσεις θεωρούμε ότι έχουν ως αντίστοιχα σύμβολα στη συμβολική γλώσσα ισάριθμες εμφανίσεις της ίδιας προτασιακής μεταβλητής.
- Διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές μιας έκφρασης της συμβολικής γλώσσας μπορούν να αντικαθίστανται με την ίδια πρόταση. (Για παράδειγμα, αν στην έκφραση Π ↓ Ρ θέσουμε όπου Π, αλλά και όπου Ρ, την πρόταση «πάω για ύπνο», τότε παίρνουμε την πρόταση «ούτε πάω για ύπνο ούτε πάω για ύπνο», η οποία είναι ταυτόσημη με την πρόταση «δεν πάω για ύπνο», αλλά εκφέρεται με αυτόν τον τρόπο για να δείξει αποφασιστικότητα, πείσμα κτλ. Τέτοιες εκφορές είναι συχνές στον ιδιωματικό λόγο των παιδιών).

4. Σύζευξη

Στη συνέχεια εξετάζουμε ορισμένους διμελείς συνδέσμους που είναι απαραίτητοι για την ευχερή και καρποφόρα μελέτη των ζητημάτων με τα οποία ασχολείται η λογική. Ας προχωρήσουμε λοιπόν συνεχίζοντας την ιστορία που είχαμε ξεκινήσει στα προηγούμενα. Ο Γιώργος αφού έχουν περάσει είκοσι λεπτά αφότου θέλησε να μάθει τι γίνεται στο τμήμα των παραγγελιών, φωνάζει τον Γιάννη και του λέει: «πήγαινε σε παρακαλώ στο δεύτερο όροφο και έλα να μου πεις με μια πρόταση τι γίνεται εκεί». Ο Γιάννης κατεβαίνει και επιστρέφοντας λέει:

(1) «ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του και ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο»

θέλοντας να περιγράψει με αυτήν την πρόταση την κατάσταση του τμήματος παραγγελιών.

Η πρόταση αυτή προκύπτει από δύο άλλες απλούστερες:

(2) «ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του» και

(3) «Ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο»,

οι οποίες συνδέονται με τη λέξη και.

Μια τέτοια πρόταση καλείται **συζευκτική** και χρησιμοποιείται για να περιγράψει μια κατάσταση των πραγμάτων του κόσμου μας, η οποία συντίθεται από τις δύο καταστάσεις που περιγράφουν οι δύο προτάσεις που συμπλέκονται. Μπορούμε να πούμε, με άλλα λόγια, ότι μια τέτοια πρόταση χρησιμοποιείται με σκοπό να περιγράψει τη συνύπαρξη σε ένα ενιαίο όλο και των δύο καταστάσεων τις οποίες περιγράφουν οι δύο προτάσεις που συμπλέκονται. Η ανατροπή ή παύση ισχύος έστω και της μιας από τις δύο καταστάσεις ανατρέπει τη μια κατάσταση που περιγράφει η σύζευξη. Στο προηγούμενο παράδειγμα η πρόταση (1) χρησιμοποιείται για να περιγραφεί εκείνη η κατάσταση του τμήματος παραγγελιών, η οποία εννοείται ως συντιθέμενη από δύο συνυπάρχουσες υπό-καταστάσεις:

– ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του,

– ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο.

Αν παύσει να υφίσταται η μια ή και οι δύο καταστάσεις παύει να υφίσταται και η κατάσταση που περιγράφει η (1).

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια αναλυτικά πότε η πρόταση (1) περιγράφει μια υφισταμένη κατάσταση του τμήματος παραγγελιών και πότε όχι. Δηλαδή ας δούμε πότε η (1) είναι αληθής και πότε ψευδής. Οι συνδυασμοί των αληθοτιμών των προτάσεων (2) και (3) είναι οι ακόλουθοι:

- Η (2) είναι αληθής και η (3) είναι αληθής. Σε αυτήν την περίπτωση ο Κώστας και ο Νίκος βρίσκονται στα γραφεία τους και επομένως η πρόταση (1) περιγράφει την υφισταμένη κατάσταση του τμήματος παραγγελιών. Συνεπώς είναι αληθής.
- Η (2) είναι αληθής και η (3) είναι ψευδής. Σε αυτήν την περίπτωση ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του αλλά ο Νίκος δε βρίσκεται στο δικό του. Συνεπώς, αυτό που περιγράφει η (1) δεν είναι υφισταμένη κατάσταση στο τμήμα παραγγελιών. Δηλαδή, περιγράφει κάτι που δεν υφίσταται, επομένως είναι ψευδής.
- Η (2) είναι ψευδής και η (3) είναι αληθής. Σε αυτήν την περίπτωση ο Νίκος βρίσκεται στο γραφείο του, αλλά ο Κώστας όχι.

Συνεπώς, αυτό που περιγράφει η (1) δεν είναι η υψισταμένη κατάσταση στο τμήμα παραγγελιών. Δηλαδή, περιγράφει κάτι που δεν υφίσταται, επομένως είναι ψευδής.

- Η (2) είναι ψευδής και η (3) είναι ψευδής. Σε αυτήν την περίπτωση ο Κώστας δε βρίσκεται στο γραφείο του και ο Νίκος επίσης δε βρίσκεται στο δικό του. Επομένως η (1) περιγράφει μια κατάσταση που δεν υφίσταται, δηλαδή είναι ψευδής.

Αυτές τις τέσσερις δυνατές περιπτώσεις μπορούμε να τις συνοψίσουμε με τον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 4

Ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του	Ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο	Ο Κώστας βρίσκεται στο γραφείο του και ο Νίκος βρίσκεται στο δικό του γραφείο
αληθής	αληθής	αληθής
αληθής	ψευδής	ψευδής
ψευδής	αληθής	ψευδής
ψευδής	ψευδής	ψευδής

Παρατηρούμε ότι η πρόταση (1) είναι αληθής μόνον στην περίπτωση όπου και οι δύο προτάσεις (2) και (3) είναι αληθείς και μόνον σε αυτήν. Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα καταλήγουμε, αν συνδέσουμε με τη λέξη *και* οποιοδήποτε ζεύγος προτάσεων. Η διαδοχή «...και...» είναι ένας σύνδεσμος τον οποίο ονομάζουμε **σύζευξη.** Κάθε πρόταση που προκύπτει με την πλήρωση των κενών του με ζεύγη προτάσεων καλείται **σύζευξη** αυτών, ή όπως είπαμε και στα προηγούμενα, **συζευκτική πρόταση**. Για αυτόν το σύνδεσμο επιλέγουμε το σύμβολο $\wedge$. Έτσι, η συμβολική έκφραση, η οποία αντιστοιχεί στη σύζευξη δύο προτάσεων είναι η $\Pi \wedge P$ και διαβάζεται «Π και Ρ», όπου Π και Ρ είναι προτασιακές μεταβλητές. Στη συνέχεια, για λόγους ευκολίας ονομάζουμε και την έκφραση $\Pi \wedge P$ **σύζευξη**, όπως επίσης, αντί να λέμε *ο σύνδεσμος «... και...»* χρησιμοποιούμε την έκφραση *ο σύνδεσμος* $\wedge$. Το ίδιο κάνουμε με τους υπόλοιπους συνδέσμους που θα συναντήσουμε στη συνέχεια.

Από όσα προηγήθηκαν είναι φανερό ότι η λογική συμπεριφορά της σύζευξης περιγράφεται από τον ακόλουθο κανόνα.

Η σύζευξη δύο προτάσεων είναι αληθής πρόταση στην περίπτωση κατά την οποίαν και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς και μόνον σε αυτήν.

(Ο ίδιος κανόνας όταν αναφέρεται στη συμβολική γλώσσα που χρησιμοποιούμε στη λογική, έχει την εξής μορφή: Στη σύζευξη $\Pi \wedge P$

αντιστοιχεί αληθοτιμή Α, όταν και μόνον όταν αντιστοιχεί αληθοτιμή Α και στις δύο μεταβλητές Π και Ρ).

Συνεπώς, ο πίνακας αληθείας της σύζευξης είναι ο ακόλουθος:

Πίνακας 5

Π	Ρ	Π ∧ Ρ
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

και αντιστοιχεί στη στήλη 8 του πίνακα 3.

Αυτός ο τρόπος σύνδεσης δύο προτάσεων δεν εκφράζεται μόνον από το σύνδεσμο «... και...», αλλά και από άλλους, όπως είναι για παράδειγμα ο «...καθώς και...», ο «...αλλά...» κτλ. Αυτές οι εκφράσεις μπορεί να έχουν λεπτές σημασιολογικές διαφοροποιήσεις από τον «...και...», αλλά έχουν ακριβώς την ίδια λογική συμπεριφορά με αυτόν, η οποία περιγράφεται από τον πίνακα 5. Για το λόγο αυτό θεωρούνται από άποψη λογικής συμπεριφοράς συζεύξεις. Έτσι και γι' αυτούς τους συνδέσμους χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο ∧. Επίσης, πρέπει να επισημάνουμε ότι συχνά η τελεία (και η άνω τελεία) που χωρίζει δύο προτάσεις, και σε ορισμένες περιπτώσεις το κόμμα, λειτουργούν ως σύνδεσμοι με συμπεριφορά που περιγράφεται από τον πίνακα αληθείας της σύζευξης.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι ο σύνδεσμος «...και...» στη φυσική γλώσσα χρησιμοποιείται με ποικιλία σημασιών. Μπορεί η χρήση του να υποδηλώνει χρονική διαδοχή, όπως όταν λέμε: «θα βάλω την κατσαρόλα στη φωτιά και θα ρίξω το γάλα». Μπορεί ακόμα να υποδηλώνει και σχέση αιτιότητας μεταξύ των καταστάσεων που περιγράφουν οι δύο προτάσεις που συνδέει, όπως όταν λέμε: «αυτό το βιβλίο είναι πολύ μεγάλο και γι' αυτό είναι πολύ ακριβό». Όμως στη λογική δε μας ενδιαφέρουν αυτές οι σημασιολογικές αποχρώσεις κατά τη χρήση του συνδέσμου «...και...», αλλά η συμπεριφορά του όσον αφορά στη σχέση μεταξύ των αληθοτιμών των συνδεομένων προτάσεων και της σύζευξής τους. Αυτή η σχέση, στις περιπτώσεις που προαναφέραμε, δίδεται από τον πίνακα 5.

Συχνά εκφραζόμαστε με προτάσεις όπως η ακόλουθη:

«το βιβλίο βρίσκεται στο τραπέζι και το τασάκι είναι στο ράφι και το μολύβι έπεσε κάτω»,

την οποία συνήθως εκφέρουμε με κομψότερο τρόπο, όπως:

«το βιβλίο βρίσκεται στο τραπέζι, το τασάκι είναι στο ράφι και το μολύβι έπεσε κάτω».

Παρατηρούμε ότι η πρόταση αυτή ουσιαστικά παράγεται από ένα σύνδεσμο, ο οποίος είναι τριθέσιος, τον «...και...και..» αν συμπληρώσουμε τα κενά του με τις προτάσεις;

«το βιβλίο βρίσκεται στο τραπέζι»
«το τασάκι είναι στο ράφι»
«το μολύβι έπεσε κάτω»

Αν τον μελετήσουμε θα δούμε ότι η λογική συμπεριφορά του είναι τέτοια, ώστε κάθε πρόταση που παράγεται από αυτόν είναι αληθής όταν και μόνον όταν κάθε μια από τις προτάσεις που συνδέονται με αυτόν είναι αληθής. Τον ονομάζουμε και αυτόν σύζευξη και η αντίστοιχη έκφραση στη συμβολική γλώσσα είναι $\Pi \wedge P \wedge \Sigma$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεριφέρονται και τετραθέσιες και πολυθέσιες συζεύξεις.

Τις συμβολίζουμε $\Pi_1 \wedge \Pi_2 \wedge ... \wedge \Pi_v$ και η λογική συμπεριφορά τους καθορίζεται από τον ακόλουθο κανόνα:

Στη σύζευξη $\Pi_1 \wedge \Pi_2 \wedge ... \wedge \Pi_v$ αντιστοιχεί αληθοτιμή Α όταν και μόνον όταν σε κάθε μια από τις $\Pi_1, \Pi_2, ... \Pi_v$ αντιστοιχεί αληθοτιμή Α.

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε συζευκτική πρόταση; Πότε τη χρησιμοποιούμε;
2. Ποιος είναι ο πίνακας αλήθειας της σύζευξης;
3. Διατυπώστε τον κανόνα που περιγράφει τη λογική συμπεριφορά της σύζευξης.

Ασκήσεις

1. Να γίνει ο πίνακας αληθείας για κάθε έναν από τους ακόλουθους συνδέσμους.

   i. «...ωστόσο...», ii. »... αλλά...»,
   iii. «... αν και...», iv. «... μολονότι...»,
   v. «... καθώς ...», vi. «... ενώ ...».

   Τι παρατηρείτε;

2. Η πρόταση: «Ο Γαλαξίας μας περιλαμβάνει 10^9+153 άστρα και το ηλιακό μας σύστημα περιλαμβάνει πέντε πλανήτες» είναι αληθής ή ψευδής;
3. Το Ψευτοχώρι κατοικείται μόνον από δύο κατηγορίες ανθρώπων. Η πρώτη περιλαμβάνει ανθρώπους που λένε πάντα την αλήθεια, τους οποίους ονομάζουμε ειλικρινείς. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει ανθρώπους που λένε πάντα ψέματα. Αυτούς τους λέμε ψεύτες. Ένας επισκέπτης του χωριού συνάντησε δύο κατοίκους και τους ρώτησε αν είναι ψεύτες ή ειλικρινείς. Τότε ο ένας του είπε: «εγώ είμαι ψεύτης αλλά αυτός εδώ δεν είναι». Τι ήταν ο καθένας τους;

5. Διάζευξη

Ας συνεχίσουμε εδώ την ιστορία που είχαμε ξεκινήσει στα προηγούμενα. Ο Γιώργος ρωτάει τον Γιάννη: «Το τμήμα παραγγελιών έχει αναλάβει το φάκελο με τις παραγγελίες;» Ο Γιάννης απαντάει καταφατικά λέγοντας:

(1) «Το φάκελο τον έχει αναλάβει ο Κώστας ή ο Νίκος».

Η πρόταση αυτή έχει την ίδια σημασία με τη λιγότερο κομψά διατυπωμένη πρόταση:

(2) «Το φάκελο τον έχει αναλάβει ο Κώστας ή το φάκελο τον έχει αναλάβει ο Νίκος».

Παρατηρούμε ότι η τελευταία δημιουργείται από τη σύνδεση των προτάσεων:

(3) «Το φάκελο τον έχει αναλάβει ο Κώστας» και

(4) «Το φάκελο τον έχει αναλάβει ο Νίκος»

με τη λέξη *ή*. Μια τέτοια πρόταση καλείται **διαζευκτική.** Χρησιμοποιείται για να περιγράψει μια κατάσταση, η οποία υφίσταται μόνον στην περίπτωση που υφίσταται μια τουλάχιστον από τις καταστάσεις που περιγράφονται από τις δύο προτάσεις που συνδέονται και μόνο σε αυτήν. (Με άλλα λόγια, χρησιμοποιείται για να δηλώσει δύο ανεξάρτητους εναλλακτικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να υφίσταται η κατάσταση που περιγράφει. Λέμε ανεξάρτητους διότι είναι ανοιχτή η πιθανότητα να υπάρχει και τρίτος τρόπος, ο οποίος εξαρτά-

Bolzano

ται από τους άλλους δυο: να υφίσταται και οι δύο καταστάσεις που περιγράφουν οι προτάσεις που συνδέουμε με τη λέξη *ή*). Αν και οι δύο καταστάσεις παύσουν να υφίστανται, τότε δεν υφίσταται και η κατάσταση που περιγράφει η διαζευκτική πρόταση. Στο παράδειγμα που έχουμε θεωρήσει εδώ, η πρόταση (2) χρησιμοποιείται για να περιγραφεί εκείνη η κατάσταση κατά την οποία το τμήμα παραγγελιών έχει αναλάβει το φάκελο. Τούτο έχει γίνει τουλάχιστον από έναν από τους υπαλλήλους που απαρτίζουν το τμήμα των παραγγελιών: τον Κώστα και τον Νίκο. Οι δύο προτάσεις (3) και (4) περιγράφουν δύο ανεξάρτητους εναλλακτικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να υφίσταται η κατάσταση που περιγράφει η (2), δηλαδή το να έχει αναλάβει το τμήμα παραγγελιών το φάκελο. Αν οι δύο υπάλληλοι δεν έχουν αναλάβει τον φάκελο, τότε δεν υφίσταται η κατάσταση που περιγράφει η (2).

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια αναλυτικά πότε η πρόταση (2) περιγράφει μια υφισταμένη κατάσταση του τμήματος παραγγελιών και πότε όχι. Δηλαδή, ας δούμε πότε η (2) είναι αληθής και πότε ψευδής. Οι συνδυασμοί των αληθοτιμών των προτάσεων (3) και (4) είναι οι ακόλουθοι:

- Η (3) είναι αληθής και η (4) είναι αληθής. Σε αυτήν την περίπτωση και οι δύο υπάλληλοι έχουν αναλάβει το φάκελο και συνεπώς η κατάσταση του τμήματος παραγγελιών περιγράφεται από την πρόταση (2). Επομένως, αυτή είναι αληθής.
- Η (3) είναι αληθής και η (4) είναι ψευδής. Σε αυτήν την περίπτωση μόνον ο Κώστας έχει αναλάβει το φάκελο. Συνεπώς, η κατάσταση που υφίσταται στο τμήμα παραγγελιών ως προς το φάκελο, περιγράφεται από την (2), η οποία επομένως είναι αληθής.
- Η (3) είναι ψευδής, και η (4) είναι αληθής. Σε αυτήν την περίπτωση ο Νίκος έχει αναλάβει μόνος του το φάκελο. Επομένως, και σε αυτήν την περίπτωση η (2) περιγράφει μια υφισταμένη κατάσταση, δηλαδή είναι αληθής.
- Η (3) είναι ψευδής και η (4) είναι ψευδής. Σε αυτήν την περίπτωση ουδείς στο τμήμα παραγγελιών έχει αναλάβει το φάκελο. Επομένως η (2) περιγράφει μια κατάσταση του τμήματος παραγγελιών που δεν υφίσταται. Άρα αυτή είναι ψευδής.

Αυτές τις τέσσερις δυνατές περιπτώσεις μπορούμε να τις συνοψίσουμε με τον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 6

(3)	(4)	(2)
αληθής	αληθής	αληθής
αληθής	ψευδής	αληθής
ψευδής	αληθής	αληθής
ψευδής	ψευδής	ψευδής

Παρατηρούμε ότι η πρόταση (2) είναι ψευδής όταν και μόνον όταν και οι δύο προτάσεις (3) και (4) είναι ψευδείς. Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα καταλήγουμε αν συμπληρώσουμε τα δύο κενά του συνδέσμου «...ή...» με οποιοδήποτε άλλο ζεύγος προτάσεων. Ο σύνδεσμος «... ή ...» ονομάζεται **διάζευξη**. Κάθε πρόταση που προκύπτει με την πλήρωση των κενών του με ζεύγη προτάσεων καλείται **διάζευξη** αυτών ή, όπως έχουμε ήδη πει, **διαζευκτική πρόταση**. Για αυτόν το σύνδεσμο επιλέγουμε το σύμβολο ∨. Έτσι, η συμβολική έκφραση, η οποία αντιστοιχεί στη διάζευξη δύο προτάσεων, είναι η Π ∨ Ρ και διαβάζεται «Π ή Ρ», όπου Π και Ρ είναι προτασιακές μεταβλητές. Για ευκολία ονομάζουμε **διάζευξη** και την έκφραση Π∨Ρ. Ο πίνακας αληθείας που αντιστοιχεί στη διάζευξη είναι ο ακόλουθος:

Πίνακας 7

Π	Ρ	Π∨Ρ
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

και αντιστοιχεί στη στήλη 2 του πίνακα 3

Από όσα προηγήθηκαν είναι φανερό ότι ισχύει ο ακόλουθος κανόνας.

Η διάζευξη δύο προτάσεων είναι αληθής όταν και μόνον όταν τουλάχιστον η μια από τις δυο προτάσεις είναι αληθής.

(Ο κανόνας αυτός για την έκφραση Π∨Ρ γίνεται: Στην Π∨Ρ αντιστοιχεί αληθοτιμή Α, όταν και μόνον όταν αντιστοιχεί η αληθοτιμή Α σε μια τουλάχιστον από τις Π και Ρ.).

Για τις ποικίλες χρήσεις του *ή* μέσα σε μια πρόταση ισχύουν παρατηρήσεις ανάλογες με εκείνες που κάναμε για το σύνδεσμο *και*.

Όπως είπαμε στα προηγούμενα, χρησιμοποιήσαμε την πρόταση (2), ή την (1), θέλοντας να δηλώσουμε με αυτήν ότι υφίσταται τουλάχιστον μια από τις δύο καταστάσεις που περιγράφουν οι προτάσεις (3) και (4). Αυτό σημαίνει ότι η (2) είναι αληθής και στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις (3) και (4) είναι αληθείς. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο σύνδεσμος «...ή...» είναι **εγκλειστικός**. Πολύ συχνά όμως στη φυσική γλώσσα χρησιμοποιούμε αυτόν το σύνδεσμο με ένα διαφορετικό τρόπο. Ας υποθέσουμεότι ο Γιώργος λέει στον Γιάννη:

«Το βράδυ θα πάω στον κινηματογράφο ή θα πάω στην ταβέρνα. Δεν έχω χρήματα για να πάω και στα δύο».

Όταν χρησιμοποιούμε το σύνδεσμο ή με αυτόν τον τρόπο λέμε ότι είναι **αποκλειστικός**. Στην περίπτωση αυτή ο σύνδεσμος «...ή...» έχει διαφορετική λογική συμπεριφορά από αυτήν που μελετήσαμε στα προηγούμενα. Διαφέρει από τη διάζευξη κατά το ότι, όταν και οι δύο συνδεόμενες προτάσεις είναι αληθείς, τότε η σύνθετη πρόταση που προκύπτει είναι ψευδής. Συνεπώς, η σύνθετη πρόταση που προκύπτει αν συμπληρώσουμε τα δύο κενά του με προτάσεις, είναι ψευδής όταν και μόνον όταν οι συνδεόμενες προτάσεις έχουν την ίδια αληθοτιμή. Αυτός ο σύνδεσμος καλείται **αποκλειστική διάζευξη** και χρησιμοποιούμε για αυτόν το σύμβολο $\veebar$. Ο πίνακας αληθείας του είναι ο ακόλουθος:

Πίνακας 8

Π	Ρ	Π$\veebar$Ρ
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

και αντιστοιχεί στη στήλη 10 του πίνακα 3.

Αν το "ή", που χρησιμοποιούμε σε μια σύνθετη πρόταση, είναι εγκλειστικό ή αποκλειστικό γίνεται αντιληπτό από το πλαίσιο εντός του οποίου εκφέρεται η πρόταση αυτή.

Υπάρχουν και άλλες λέξεις ή διατάξεις λέξεων που έχουν την ίδια λογική συμπεριφορά με τη λέξη *ή*, που περιγράφεται από τον ίδιο πίνακα αληθείας, όπως για παράδειγμα η λέξη *είτε*. Αυτές μπορεί να έχουν λεπτές σημασιολογικές διαφοροποιήσεις από το σύνδεσμο «...ή...», αλλά έχουν ακριβώς την ίδια λογική συμπεριφορά με αυτόν,

η οποία περιγράφεται από τον πίνακα 7. Για το λόγο αυτό θεωρούνται από άποψη λογικής συμπεριφοράς διαζεύξεις. Έτσι, όταν είναι απαραίτητη η χρήση συμβολικής γλώσσας, όπου τις συναντούμε τις συμβολίζουμε με το σύμβολο $\vee$.

Όπως συναντούμε πολυθέσιες συζεύξεις, έτσι συναντούμε και πολυθέσιες διαζεύξεις. Μια ν-θέσια διάζευξη συμβολίζεται $\Pi_1 \vee \Pi_2 \vee \ldots \vee \Pi_\nu$ και ισχύει γι' αυτήν ο ακόλουθος κανόνας:

Στην $\Pi_1 \vee \Pi_2 \vee \ldots \vee \Pi_\nu$ αντιστοιχεί αληθοτιμή Α όταν και μόνον όταν σε μια τουλάχιστον από τις $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu$ αντιστοιχεί αληθοτιμή Α.

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε διαζευκτική πρόταση; Πότε τη χρησιμοποιούμε;
2. Ποιος είναι ο πίνακας αληθείας της διάζευξης;
3. Πότε είναι αληθής μια διάζευξη;

Ασκήσεις

1. Ένας κάτοικος του Ψευτοχωρίου λέει σε έναν άλλον: «εγώ είμαι ψεύτης ή εσύ είσαι ειλικρινής». Τι είναι ο καθένας από αυτούς;
2. Η πρόταση: «Ο Γαλαξίας μας περιλαμβάνει 10^9+153 άστρα ή η Γη έχει έναν δορυφόρο» είναι αληθής ή ψευδής;
3. Δίνονται οι προτάσεις

i. «το τέσσερα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του τρία»
ii. «το τέσσερα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του τέσσερα»
iii. «το τέσσερα είναι μικρότερο ή ίσο του τέσσερα»
iv. «το τέσσερα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του πέντε»

Ποιες από αυτές είναι ψευδείς και ποιες αληθείς;

4. Δυο κάτοικοι του Ψευτοχωρίου συζητούν. Ο ένας από αυτούς λέει στον άλλον;
«τουλάχιστον ο ένας από μας είναι ψεύτης». Τι είναι ο καθένας τους;

6. Άρνηση

Πολύ συχνά στη φυσική γλώσσα χρησιμοποιούμε λέξεις ή διατάξεις λέξεων, οι οποίες δε συνιστούν προτάσεις, αλλά καθώς συμπλέκονται με μια ή περισσότερες προτάσεις, το σύνολο συνιστά μια νέα πρόταση. Είναι φανερό πως οι σύνδεσμοι δημιουργούν πιο σύνθετες προτάσεις. Συνήθως ονομάζονται προτασιακοί γεννήτορες. Ως **προτασιακοί γεννήτορες** χρησιμοποιούνται σύνδεσμοι, αντωνυμίες, επιρρήματα, καθώς και εκφράσεις όπως: «ελπίζω ότι...», «ισχύει ότι...», «πιστεύω ότι...», «είναι πιθανόν ότι...» κτλ. Οι προτασιακοί γεννήτορες συντακτικά εμφανίζονται ως διαδοχή λέξεων και κενών. Όταν τα κενά συμπληρωθούν με προτάσεις, το σύνολο συνιστά μια νέα πρόταση. Είναι φανερό πως οι σύνδεσμοι που εξετάσαμε στα προηγούμενα είναι προτασιακοί γεννήτορες.

Ας θεωρήσουμε την πρόταση:

(1) «ο Γιώργος χτες το βράδυ δεν πήγε στον κινηματογράφο»

Παρατηρούμε ότι αυτή προκύπτει από την πρόταση:

(2) «ο Γιώργος χτες το βράδυ πήγε στον κινηματογράφο»,

αν μπροστά από το ρήμα της τοποθετήσουμε τη λέξη *δεν*. Η λέξη αυτή λειτουργεί ως προτασιακός γεννήτορας, ο οποίος δρα σε μια μόνον πρόταση.

Στη συνήθη χρήση της γλώσσας εισάγουμε τη λέξη αυτή σε μια πρόταση για να δηλώσουμε ότι η κατάσταση που περιγράφεται από αυτήν δεν υφίσταται. Ας δούμε τι συμβαίνει σχετικά με τις αληθοτιμές των προτάσεων που παράγονται με την εισαγωγή της λέξης *δεν*.

- Υποθέτουμε ότι η (2) είναι αληθής. Τότε ο Γιώργος πήγε στον κινηματογράφο και συνεπώς η (1) περιγράφει μια κατάσταση που δεν υφίσταται, δηλαδή είναι ψευδής.
- Υποθέτουμε ότι η (2) είναι ψευδής. Τότε ο Γιώργος δεν πήγε στον κινηματογράφο και συνεπώς η (1) περιγράφει μια υφισταμένη κατάσταση, δηλαδή είναι αληθής.

Παρατηρούμε ότι ο προτασιακός γεννήτορας «δεν...» αλλάζει την αληθοτιμή της πρότασης (2). Το ίδιο συμβαίνει και με οποιανδήποτε άλλη πρόταση. Η πρόταση που παράγεται με τη δράση του *δεν* επί μιας προτάσεως λέγεται **άρνηση** αυτής. Η (1) για παράδειγμα είναι η άρνηση της (2).

Παρατηρούμε ότι ο προτασιακός γεννήτορας «δεν...» έχει μια σημα-

ντική ιδιότητα που συναντήσαμε στους συνδέσμους που μελετήσαμε στα προηγούμενα. Δηλαδή, έχει την ιδιότητα πως η αληθοτιμή της άρνησης μιας πρότασης εξαρτάται μόνον από την αληθοτιμή αυτής και όχι από τη σημασία της. Έτσι παρ' ότι εφαρμόζεται μόνο σε μια πρόταση και δεν συνδέει δυο ή περισσότερες προτάσεις όπως οι προαναφερθέντες σύνδεσμοι, για λόγους ομοιογένειας και ενότητας ως προς την ορολογία θεωρούμε το γεννήτορα αυτόν σύνδεσμο και τον καλούμε μονοθέσιο ή μονομελή σύνδεσμο. Τον καλούμε **άρνηση** και χρησιμοποιούμε για αυτόν το σύμβολο ¬ Αν είναι Π μια προτασιακή μεταβλητή το ¬Π διαβάζεται «όχι Π» και για λόγους ευκολίας την ονομάζουμε και αυτήν **άρνηση του Π.** Αν στη θέση του Π τοποθετηθεί μια λογική πρόταση, τότε το ¬Π καθίσταται η άρνηση της πρότασης αυτής. Αν, για παράδειγμα, στη θέση του Π τοποθετήσουμε την πρόταση:

«ο Όλυμπος είναι ψηλότερος από τον Κίσαβο»,

τότε το ¬Π γίνεται η πρόταση:

«ο Όλυμπος δεν είναι ψηλότερος από τον Κίσαβο»

Από τα προηγούμενα είναι φανερό πως ισχύει ο ακόλουθος κανόνας.

Η άρνηση μιας πρότασης είναι αληθής όταν και μόνον όταν η πρόταση αυτή είναι ψευδής.

Ο πίνακας αληθείας της άρνησης είναι ο ακόλουθος:

Π	¬Π
Α	Ψ
Ψ	Α

Στη φυσική γλώσσα εκτός από τη λέξη *δεν* υπάρχουν και άλλοι τρόποι για να εκφράσει κανείς την άρνηση, όπως για παράδειγμα η διαδοχή λέξεων *δεν είναι αλήθεια ότι...*

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε άρνηση μιας πρότασης; Πότε τη χρησιμοποιούμε;
2. Ποιος είναι ο πίνακας αληθείας της άρνησης;
3. Διατυπώστε έναν κανόνα που περιγράφει τη λογική συμπεριφορά της άρνησης.

Ασκήσεις

1. Να γίνει ο πίνακας αλήθειας των ακολούθων προτασιακών γεννητόρων
   i. «... δεν ισχύει ότι...»
   ii. «δεν ισχύει ότι δεν...».

7. Συνεπαγωγή

Ένας σύνδεσμος πολύ σημαντικός και ο οποίος χρησιμοποιείται συχνά είναι ο «εάν..., τότε...». Η συμπλήρωση των κενών του με προτάσεις παράγει μια πρόταση που ονομάζεται **υποθετική.** Αν, για παράδειγμα, στο πρώτο κενό τοποθετήσουμε την πρόταση.

(1) το ποτήρι περιέχει μπύρα

και στο δεύτερο κενό την πρόταση

(2) υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι,

τότε παράγεται η υποθετική πρόταση

(3) εάν το ποτήρι περιέχει μπύρα, τότε υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι.

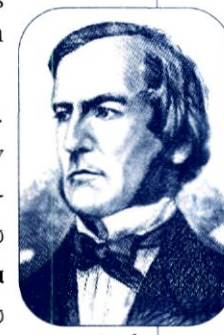
Σε μια υποθετική πρόταση ονομάζουμε **ηγούμενο όρο** (ή λόγο) την πρόταση που πληροί το πρώτο κενό του προτασιακού γεννήτορα «εάν..., τότε...» και **επόμενο όρο** (ή ακολουθία) την πρόταση που πληροί το δεύτερο κενό.

Μια υποθετική πρόταση συνήθως εκφέρεται για να περιγράψει την εξής κατάσταση: **Στην περίπτωση κατά την οποία αυτό που περιγράφει ο ηγούμενος όρος υφίσταται, υφίσταται και αυτό που περιγράφει ο επόμενος όρος.** Συνεπώς περιγράφει μια κατάσταση, η οποία είναι μια σχέση μεταξύ δύο καταστάσεων. Δηλαδή περιγράφει ενός είδους διαπλοκή και εξάρτηση των πραγμάτων του κόσμου μας, πράγμα που καθιστά τη μελέτη της λογικής συμπεριφοράς του συνδέσμου «εάν..., τότε...» δυσχερή. Από την αρχαιότητα υπήρχε διχογνωμία σχετικά με το πότε μια υποθετική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Η συζήτηση συνεχίζεται ακόμη και σήμερα σχετικά με το ποιος είναι ο πίνακας αληθείας του συνδέσμου «εάν..., τότε...».

Ας δούμε με τη βοήθεια του πιο πάνω παραδείγματος πώς συμπε-

ριφέρεται λογικά ο «εάν..., τότε...».

- Υποθέτουμε ότι οι προτάσεις (1) και (2) είναι αληθείς. Τότε έχουμε μια κατάσταση κατά την οποία υφίσταται αυτά που περιγράφουν και οι δύο όροι της υποθετικής πρότασης (3). Συνεπώς αυτή είναι αληθής διότι περιγράφει την πιο πάνω κατάσταση, η οποία υφίσταται.
- Υποθέτουμε ότι η πρόταση (1) είναι αληθής και η (2) ψευδής. Στην περίπτωση αυτή το ποτήρι περιέχει μπύρα, αλλά αυτή δεν περιέχει αλκοόλ. Τότε έχουμε μια κατάσταση κατά την οποία αυτό που περιγράφει ο ηγούμενος όρος υφίσταται, αλλά αυτό που περιγράφει ο επόμενος όρος δεν υφίσταται. Συνεπώς, σύμφωνα με όσα είπαμε πιο πάνω, η (3) περιγράφει μια κατάσταση που δεν υπάρχει, που είναι διαφορετική από την υφισταμένη. Συνεπώς είναι ψευδής.


Boole

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η πρόταση (1) είναι ψευδής. Δηλαδή, ας υποθέσουμε ότι στο ποτήρι δεν υπάρχει μπύρα. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει σοβαρό πρόβλημα σχετικά με τον εντοπισμό της αληθοτιμής της πρότασης (3). Αυτή βεβαιώνει πως υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι εφόσον αυτό περιέχει μπύρα. Τι γίνεται όμως στην περίπτωση που αυτό δεν περιέχει μπύρα;

Στη συνήθη χρήση των υποθετικών προτάσεων μας ενδιαφέρει αν ο επόμενος όρος περιγράφει ή όχι την πραγματικότητα κάτω από τις συνθήκες που περιγράφει ο ηγούμενος όρος. Έτσι, δεν χρησιμοποιούμε μια υποθετική πρόταση στην περίπτωση που υπάρχει ενδεχόμενο να είναι ψευδής ο ηγούμενος όρος. Θα λέγαμε ότι από την ίδια τη δομή της δεν τίθεται θέμα ψεύδους του ηγουμένου όρου. Αν, για παράδειγμα σε μια παρέα είχαμε πει:

«πάω στοίχημα 1000 δραχμές ότι εάν το ποτήρι περιέχει μπύρα, τότε υπάρχει αλκοόλ σε αυτό» και στη συνέχεια διαπιστώνουμε ότι το ποτήρι δεν περιέχει μπύρα αλλά λεμονάδα, τότε είναι φανερό πως το στοίχημα δεν υφίσταται, είναι άκυρο. Όμως, τι γίνεται στην περίπτωση που το ποτήρι περιέχει κρασί και συνεπώς υπάρχει αλκοόλ σε αυτό; Θα μπορούσαμε να εγείρουμε αξιώσεις πως κερδίσαμε το στοίχημα, αφού υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι;

Αυτοί είναι μερικοί προβληματισμοί σε σχέση με τη χρήση μιας υποθετικής πρότασης στην καθημερινότητα. Όμως, υπάρχουν και ανάγκες διερεύνησης τεχνικών ζητημάτων σχετικών με επιστημονικούς συλλογισμούς, επιχειρηματολογίες, αυτοματισμούς κτλ. όπου σαφώς

τίθεται θέμα ψεύδους του ηγουμένου όρου μιας υποθετικής πρότασης. Έτσι, τίθεται ζήτημα επέκτασης της λειτουργίας του συνδέσμου «εάν..., τότε...» πέρα από τη συνηθισμένη του χρήση και στην περίπτωση όπου η πρόταση που πληροί το πρώτο κενό είναι ψευδής. Αυτό μπορεί να γίνει με τον εξής τρόπο: (Ας το δούμε με τη βοήθεια του παραδείγματος που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω).

Όταν εκφέρουμε την πρόταση (3) περιγράφουμε την εξής κατάσταση: στην περίπτωση που το ποτήρι περιέχει μπύρα, θα περιέχει και αλκοόλ. Την κατάσταση αυτή όμως μπορούμε να την κατανοήσουμε και να την περιγράψουμε και με έναν διαφορετικό τρόπο, όπως πιο κάτω.

Θεωρούμε ότι η κατάσταση εκείνη, η οποία περιγράφεται με τη διατύπωση «στην περίπτωση που το ποτήρι περιέχει μπύρα, θα περιέχει και αλκοόλ» είναι ακριβώς η κατάσταση εκείνη, η οποία περιγράφεται με τη διατύπωση «δεν είναι δυνατόν το ποτήρι να περιέχει μπύρα και να μην περιέχει αλκοόλ» Γενικώς, έτσι είναι αποδεκτό και έτσι χρησιμοποιούμε τη φυσική γλώσσα.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι η (3) περιγράφει την κατάσταση εκείνη κατά την οποία δεν είναι δυνατόν το ποτήρι να περιέχει μπύρα, ενώ δεν υπάρχει αλκοόλ σε αυτό, τότε αυτή η πρόταση θα είναι ψευδής όταν και μόνο όταν η πρόταση

(4) «το ποτήρι περιέχει μπύρα και δεν υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι» είναι αληθής. Η (4) όμως είναι μια συζευκτική πρόταση και υπάρχει μόνο μια περίπτωση κατά την οποία γίνεται αληθής, όταν δηλαδή και οι δύο συνδεόμενες προτάσεις είναι αληθείς. Στις υπόλοιπες τρεις περιπτώσεις είναι ψευδής και επομένως η (3) θα είναι αληθής. Στις περιπτώσεις αυτές βεβαίως περιλαμβάνονται και οι δύο περιπτώσεις όπου η πρόταση (1), που είναι η πρώτη από τις δύο συνδεόμενες προτάσεις, είναι ψευδής. Έτσι, δε μας εμποδίζει τίποτε να δεχτούμε ότι μπορεί η πρόταση (1), που συνιστά και ηγούμενο όρο της υποθετικής πρότασης (3), να είναι ψευδής. Συνεπώς, μπορούμε πλέον να εξετάσουμε τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις.

- Η πρόταση (1) είναι ψευδής και η πρόταση (2) είναι αληθής. Τότε το ποτήρι δεν περιέχει μπύρα και υπάρχει αλκοόλ σε αυτό. Επομένως, η (4) δεν περιγράφει την πραγματικότητα, δηλαδή είναι ψευδής. Συνεπώς η (3) είναι αληθής.
- Η πρόταση (1) είναι ψευδής και η (2) ψευδής. Τότε το ποτήρι δεν περιέχει μπύρα και δεν περιέχει και αλκοόλ. Συνεπώς η (4)

δεν περιγράφει την υφισταμένη κατάσταση, δηλαδή είναι ψευδής. Άρα η (3) είναι αληθής.

Τα ανωτέρω συνοψίζονται με τον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 10

(1)	(2)	(3)
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Σε όσα προηγήθηκαν ουσιαστικά αποδεχτήκαμε ότι ο σύνδεσμος «εάν..., τότε...» έχει την ίδια λογική συμπεριφορά με το σύνδεσμο «δεν ισχύει το εξής: ....και δεν...». Με την παραδοχή αυτή είναι προφανές ότι ισχύει ο ακόλουθος κανόνας.

Μια υποθετική πρόταση είναι ψευδής στην περίπτωση κατά την οποίαν ο ηγούμενος όρος είναι αληθής και ο επόμενος όρος είναι ψευδής και μόνο σε αυτή.

Το σύνδεσμο αυτόν τον ονομάζουμε **συνεπαγωγή** και τον συμβολίζουμε με → . Τη συμβολική έκφραση στην οποία αντιστοιχεί η υποθετική πρόταση τη γράφουμε Π→Ρ. Αυτή διαβάζεται «Π συνεπάγεται Ρ», και καλείται και αυτή **συνεπαγωγή**. Ο πίνακας αληθείας της συνεπαγωγής είναι ο ακόλουθος.

Πίνακας 11

Π	Ρ	Π→Ρ
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι υπάρχουν προτάσεις με υποθετικό χαρακτήρα που παράγονται από τον «εάν..., τότε...», οι οποίες δεν είναι υποθετικές προτάσεις, όπως για παράδειγμα η πρόταση «εάν η ζωή είχε υπάρξει με βάση το πυρίτιο αντί του άνθρακα, τότε στον Άρη θα μπορούσε να είχε υπάρξει ζωή». Τέτοιες προτάσεις με υποθετικό χαρακτήρα

ουσιαστικά περιγράφουν το πώς θα ήταν κάποιες καταστάσεις αν κάποιες άλλες καταστάσεις ήσαν διαφορετικές από ότι έχουν υπάρξει ή υφίστανται τώρα. Για αυτές θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν είναι υποθετικές προτάσεις, αφού συνήθως δεν υπάρχει δυνατότητα να χαρακτηριστούν αληθείς ή ψευδείς. Αυτό συμβαίνει διότι δεν περιγράφουν το πώς είναι ή δεν είναι, υπήρξε ή δεν υπήρξε ο κόσμος, αλλά το πώς θα μπορούσε να υπάρξει. Δεν πρέπει να λησμονούμε ότι μια υποθετική πρόταση, ως πρόταση, πρέπει να είναι αληθής, ή ψευδής αποφαντική πρόταση χωρίς να είναι ταυτοχρόνως αληθής και ψευδής.

Να επισημάνουμε ακόμα ότι υπάρχουν αρκετές διαδοχές λέξεων, οι οποίες έχουν την ίδια λογική συμπεριφορά με τον «εάν..., τότε...». Μερικές τέτοιες είναι οι: «για να είναι... πρέπει να είναι...», «..., μόνον όταν...», «για να είναι ...είναι αναγκαίο να είναι...», «αρκεί να είναι... για να είναι...»

Γι' αυτό, όπου είναι αναγκαίο χρησιμοποιούμε και για αυτές το σύμβολο →. Αλλά υπάρχουν και αρκετοί τρόποι δόμησης προτάσεων που τις καθιστούν ταυτόσημες με υποθετικές προτάσεις. Ας δούμε, για παράδειγμα, τις ακόλουθες προτάσεις.

Εάν η ερμίνα είναι θηλαστικο, είναι και σπονδυλωτό.

Η ερμίνα είναι σπονδυλωτό αν είναι θηλαστικό.

Η ερμίνα είναι θηλαστικό μόνον αν είναι σπονδυλωτό.

Και οι τρεις είναι ταυτόσημες με την ακόλουθη υποθετική πρόταση

Εάν η ερμίνα είναι θηλαστικό, τότε είναι σπονδυλωτό.

Ερωτήσεις

1. Ποια πρόταση καλείται υποθετική; Τι καλούμε ηγούμενο όρο μιας υποθετικής πρότασης;
2. Ποιος είναι ο πίνακας αληθείας της συνεπαγωγής;
3. Πότε είναι αληθής μια υποθετική πρόταση;

Ασκήσεις

1. Η πρόταση «εάν το ηλιακό μας σύστημα έχει έξι πλανήτες, τότε ο Γαλαξίας μας περιλαμβάνει 10^9+153 άστρα» είναι αληθής ή ψευδής;

2. Ένας κάτοικος του Ψευτοχωρίου μονολογούσε: «εάν είμαι ειλικρινής, τότε πέντε και τρία κάνουν οκτώ». Ήταν ειλικρινής;
3. Ένας κάτοικος του Ψευτοχωρίου μονολογούσε: «εάν είμαι ειλικρινής, τότε σήμερα είναι Κυριακή». Τι μέρα ήταν;
4. Ένας κάτοικος του Ψευτοχωρίου είπε σε έναν άλλον: «εάν σήμερα είναι Κυριακή, τότε είμαι ψεύτης». Ήταν ψεύτης;

8. Διπλή Συνεπαγωγή ή Ισοδυναμία

Συχνά σε διαπραγματεύσεις ζητημάτων που αφορούν στα Μαθηματικά, στη λογική κτλ. χρησιμοποιούμε το σύνδεσμο «...όταν και μόνον όταν...». Η λειτουργία του έγκειται στο ότι, αν συμπληρώσουμε τα κενά του με δύο προτάσεις προκύπτει μια πρόταση, η οποία περιγράφει την εξής κατάσταση:

Οι δύο καταστάσεις που περιγράφουν οι συνδεόμενες προτάσεις είναι τέτοιες, ώστε δεν είναι δυνατόν ή μια να υφίσταται και η άλλη να μην υφίσταται. Δηλαδή, η πρόταση αυτή είναι αληθής, στην περίπτωση, και μόνο σε αυτή, που και οι δύο προτάσεις έχουν την ίδια αληθοτιμή. Το σύνδεσμο αυτό τον συμβολίζουμε με $\leftrightarrow$ και τον ονομάζουμε **διπλή συνεπαγωγή** ή **ισοδυναμία.** Μια πρόταση που παράγεται από αυτόν το σύνδεσμο ονομάζεται επίσης **διπλή συνεπαγωγή** και η συμβολική έκφραση που αντιστοιχεί σε αυτήν είναι η $\Pi \leftrightarrow P$. (Αυτή η έκφραση ονομάζεται επίσης διπλή συνεπαγωγή).

Ισχύει λοιπόν ο ακόλουθος κανόνας.

Η διπλή συνεπαγωγή είναι αληθής στην περίπτωση στην οποίαν οι δύο συνδεόμενες προτάσεις έχουν την ίδια αληθοτιμή και μόνο σε αυτή.

Ο πίνακας αληθείας της διπλής συνεπαγωγής προφανώς είναι ο ακόλουθος:

Πίνακας 12

Π	Ρ	Π↔Ρ
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Υπάρχουν και άλλοι σύνδεσμοι στη φυσική γλώσσα, οι οποίοι έχουν την ίδια λογική συμπεριφορά με τον «...όταν και μόνον όταν...», όπως οι «...εάν και μόνον εάν...», «για να ...πρέπει και αρκεί να...», «ικανή και αναγκαία συνθήκη για να... είναι να...» κτλ. Γι' αυτό θεωρούνται από άποψη λογικής συμπεριφοράς ισοδυναμίες. Έτσι, όταν είναι απαραίτητη, η χρήση συμβολικής γλώσσας, όπου συναντούμε αυτούς τους συνδέσμους χρησιμοποιούμε για αυτούς το ίδιο σύμβολο ↔.

Ερωτήσεις

1. Πότε χρησιμοποιούμε μια διπλή συνεπαγωγή;
2. Ποιος είναι ο πίνακας αληθείας της διπλής συνεπαγωγής.

Ασκήσεις

1. Η κυρία Μαρία ρώτησε τα δυο παιδιά της τον Γιώργο τον Γιάννη: «ποιος από τους δύο σας έφαγε το γλυκό;» Ο Γιώργος απάντησε: «η απάντησή μου είναι αληθής όταν και μόνον όταν δεν έχει φάει το γλυκό ο Γιάννης». Ποιος έφαγε το γλυκό;
2. Ρώτησαν έναν κάτοικο του Ψευτοχωρίου αν υπάρχει καφενείο στο χωριό του. Αυτός απάντησε: «υπάρχει καφενείο στο Ψευτοχώρι αν και μόνον αν είμαι ψεύτης». Έχει καφενείο το Ψευτοχώρι;

9. Προτασιακός Τύπος

Ας θεωρήσουμε τις εξής προτάσεις:

1. «το βιβλίο βρίσκεται στο ράφι»

2. «θα δανειστώ το βιβλίο για το βράδυ»

3. «το βιβλίο δε βρίσκεται στο ράφι»

4. «αν το βιβλίο βρίσκεται στο ράφι, τότε θα δανειστώ το βιβλίο για το βράδυ»

Παρατηρούμε ότι η πρόταση 3 προέρχεται από τη δράση του συνδέσμου «δεν...» στην πρόταση 1 και η 4 από τη δράση του συνδέσμου «εάν.., τότε...» στις προτάσεις 1 και 2. Όμως η πρόταση 1, όπως και η πρόταση 2, δεν προέρχεται από τη δράση κάποιου συνδέσμου σε κάποια άλλη πρόταση.

Μια τέτοια πρόταση, όπως η 1 ή 2, καλείται **απλή**. Στην αντίθετη περίπτωση μια πρόταση καλείται **σύνθετη**.

Μέχρι τώρα μελετήσαμε σύνθετες προτάσεις, που δομούνται με τη βοήθεια ενός συνδέσμου και μιας ή δύο απλών προτάσεων. Όμως συχνά χρησιμοποιούμε προτάσεις, οι οποίες συγκροτούνται με τη βοήθεια οποιουδήποτε αριθμού προτάσεων και συνδέσμων. Ας δούμε την ακόλουθη έκφραση

5. «θα πάω στη βιβλιοθήκη και θα συμβουλευτώ το λεξικό ή θα διαβάσω τα αυριανά μαθήματα».

Αυτή περιέχει τρεις απλές προτάσεις:

6. «θα πάω στη βιβλιοθήκη»

7. «θα συμβουλευτώ το λεξικό»

8. «θα διαβάσω τα αυριανά μαθήματα»

Παρατηρούμε ότι εμφανίζει συντακτική αβεβαιότητα, καθώς η σημασία της δεν είναι φανερή χωρίς αναδιάταξη κάποιων όρων της ή κατάλληλη συμπλήρωση. Αυτό φαίνεται από το γεγονος πως χρησιμοποιώντας ένα κόμμα, έχουμε δύο δυνατές εκδοχές της 5:

9. «θα πάω στη βιβλιοθήκη και θα συμβουλευτώ το λεξικό, ή θα διαβάσω τα αυριανά μαθήματα».

10. «θα πάω στη βιβλιοθήκη, και θα συμβουλευτώ το λεξικό ή θα διαβάσω τα αυριανά μαθήματα».

(Πρέπει να πούμε σχετικά με την 10 ότι κατά την ομιλία το ρόλο του κόμματος, το οποίο χρησιμοποιούμε εδώ για να δηλώσουμε μια παύση, τον παίζει ο τρόπος εκφοράς του λόγου).

Η πρόταση 9 περιγράφει την εξής κατάσταση:

Θα κάνω τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα:

- **θα πάω στη βιβλιοθήκη και θα συμβουλευτώ το λεξικό,**
- **Θα διαβάσω τα αυριανά μαθήματα (πιθανόν όχι στη βιβλιοθήκη, αλλά κάπου αλλού).**

Η πρόταση 10 περιγράφει την εξής κατάσταση:

θα κάνω και τα δύο που ακολουθούν:

- **θα πάω στη βιβλιοθήκη,**
- **ευρισκόμενος στη βιβλιοθήκη θα συμβουλευτώ το λεξικό ή θα διαβάσω τα αυριανά μαθήματα.**

De Morgan

Παρατηρούμε ότι στην πρώτη περίπτωση έχουμε μια διαζευκτική πρόταση, η οποία προκύπτει από τη σύνδεση της απλής πρότασης 8 και της σύνθετης συζευκτικής πρότασης «θα πάω στη βιβλιοθήκη και θα συμβουλευτώ το λεξικό». Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε μια συζευκτική πρόταση, η οποία προκύπτει από τη σύνδεση της απλής πρότασης 6 και της σύνθετης διαζευκτικής «θα συμβουλευτώ το λεξικό ή θα διαβάσω τα αυριανά μαθήματα».

Τα δομικά στοιχεία και η διάταξή τους στις προτάσεις 9 και 10 είναι ακριβώς τα ίδια:

απλή πρόταση 6 – σύζευξη – απλή πρόταση 7 – διάζευξη – απλή πρόταση 8.

Συνεπώς, χωρίς καμιά άλλη διαφοροποίηση, και οι δύο θα είχαν την ίδια συμβολική αναπαράσταση με τη χρήση προτασιακών μεταβλητών και των συμβόλων των λογικών συνδέσμων: Π∧Ρ∨Τ. Όμως οι 9 και 10 διαφέρουν ως προς το ποια πρόταση συνδέεται με ποια και με τη βοήθεια ποιου συνδέσμου. Δηλαδή, ως προς το ποια είναι η εμβέλεια κάθε συνδέσμου, η έκταση, ο αριθμός των προτάσεων στις οποίες δρα (ή τις οποίες συνδέει).

Έτσι, στην έκφραση Π∧Ρ∨Τ, για παράδειγμα, σε σχέση προς την 9, η διάζευξη δρα στην Τ και στη σύζευξη Π∧Ρ. Πώς θα το δηλώσουμε αυτό στη συμβολική έκφραση Π∧Ρ∨Τ, ώστε αυτή να αποτελεί ακριβή αναπαράσταση της πρότασης 9; Το γεγονός ότι η διάζευξη δρα στο Π∧Ρ προϋποθέτει ότι αυτό θεωρείται ως **αριθμητικώς μία** έκφραση με την έννοια πως δε μας ενδιαφέρει το πόσα δομικά στοιχεία περιλαμβάνει και το πώς διατάσσονται αυτά. Για να δηλώσουμε αυτόν τον ενιαίο χαρακτήρα του σε σχέση με τη δράση της διάζευξης, το περικλείουμε με ένα ζεύγος παρενθέσεων. Έτσι, η πρόταση 9 έχει ως συμβολική αναπαράσταση την έκφραση (Π∧Ρ)∨Τ. Με τον τρόπο αυτό φαίνεται η έκταση της δράσης της διάζευξης προς τα αριστερά: μπορούμε να πούμε ότι αυτή δρα στην Π και στη Ρ, βεβαίως διαμέσου της σύζευξής τους. Η έκφραση (Π∧Ρ)∨Τ είναι ένας **προτασιακός τύπος** ή απλούστερα ένας **τύπος**. Επίσης, λέμε ότι **η πρόταση 9 έχει ως τύπο την έκφραση** (Π∧Ρ)∨Τ. Είναι φανερό πως η πρόταση 10 έχει ως τύπο την έκφραση Π∧(Ρ∨Τ).

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι το κόμμα στις προτάσεις 9 και 10 υποδεικνύει τη θέση του πρώτου ή του δεύτερου μέλους του ζεύγους των παρενθέσεων που χρησιμοποιούνται στους τύπους τους. Είναι φανερό πως το κόμμα και οι παρενθέσεις είναι απαραίτητα στοιχεία για τη δόμηση συνθέτων προτάσεων ή τύπων. Χωρίς αυτά δεν μπορούμε να έχουμε προτάσεις ή τύπους, αλλά μορφώματα όπως η 5 ή το Π∧Ρ∨Τ, για τα οποία δεν υπάρχει καθορισμένη σημασία.

Από όσα προηγήθηκαν είναι φανερό ότι για να κατασκευάσουμε έναν τύπο χρησιμοποιούμε

- προτασιακές μεταβλητές
- συνδέσμους
- ζεύγη παρενθέσεων

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε μόνο τους συνδέσμους ∧, ∨ ¬, → ↔ για να κατασκευάσουμε τύπους, καθώς αυτοί είναι αρκετοί για να καλύψουμε τις ανάγκες μας. Χρησιμοποιούμε επίσης τα φ_1, φ_2, φ_3,... για να δηλώνουμε τύπους.

Το τι είναι τύπος και το πώς κατασκευάζεται καθορίζεται από τους ακόλουθους κανόνες.

1. Κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι τύπος.

2. Αν ο φ_1 είναι τύπος, τότε η συμβολική έκφραση $\neg\varphi_1$ είναι τύπος.

3. Αν οι φ_1 και φ_2 είναι τύποι, τότε οι συμβολικές εκφράσεις $(\varphi_1\wedge\varphi_2)$, $(\varphi_1\vee\varphi_2)$, $(\varphi_1\rightarrow\varphi_2)$, $(\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2)$ είναι τύποι.

4. Μόνον οι εκφράσεις που κατασκευάζονται με βάση τους πιο πάνω κανόνες 1,2,3 είναι τύποι.

Εδώ πρέπει να κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις σχετικά με τους προηγούμενους κανόνες. Με τον κανόνα 3 εισάγουμε ζεύγη παρενθέσεων στους τύπους. Όταν όμως ένα ζεύγος παρενθέσεων είναι το ακραίο δομικό στοιχείο του τύπου, όπως για παράδειγμα στον (Π→Ρ), δηλαδή όταν ο τύπος θεωρείται μόνος του, τότε το παραλείπουμε και γράφουμε απλώς Π→Ρ. Ένα σύμβολο (προτασιακή μεταβλητή ή σύνδεσμο) δεν το περικλείουμε ποτέ σε παρενθέσεις.

Όταν σε ένα τύπο εμφανίζονται δύο ή περισσότεροι σύνδεσμοι, από τους οποίους ο ένας τουλάχιστον είναι διθέσιος, πρέπει να χρησιμοποιούμε ζεύγη παρενθέσεων για να αποφεύγουμε αβεβαιότητα σχετικά με την εμβέλεια δράσης των συνδέσμων. Κάθε διθέσιος σύνδεσμος συνοδεύεται αναγκαστικά από ζεύγος παρενθέσεων που προσδιορίζει την εμβέλειά του. Εξαίρεση αποτελεί ο διθέσιος σύνδεσμος του οποίου η εμβέλεια περιλαμβάνει ολόκληρο τον τύπο. Αφού ολό-

κληρος ο τύπος θεωρούμενος καθαυτός υφίσταται αυτόνομα και ανεξάρτητα από άλλες συμβολικές εκφράσεις, δε χρειάζεται, όπως είπαμε, να τον περιβάλλουμε με ζεύγος παρενθέσεων καθώς δεν τίθεται ζήτημα αβεβαιότητας. Ο διθέσιος σύνδεσμος του οποίου η εμβέλεια περιλαμβάνει ολόκληρο τον τύπο καλείται **κύριος σύνδεσμος** και χαρακτηρίζει την τελική μορφή του τύπου. Για παράδειγμα, ο τύπος (Π∧Ρ)∨Τ της πρότασης 9 έχει ως κύριο σύνδεσμο το ∨ και συνεπώς είναι μια διάζευξη (των Π∧Ρ και Τ). Ο τύπος Π∧(Ρ∨Τ) της πρότασης 10 έχει κύριο σύνδεσμο το ∧ και συνεπώς είναι τελικώς μια σύζευξη.

Σχετικά με την άρνηση μπορούμε να πούμε τα εξής. Από τους κανόνες φαίνεται ότι αποδεχόμαστε ότι η εμβέλειά της περιλαμβάνει τον αμέσως δεξιά της ευρισκόμενο ενιαίο τύπο. Δηλαδή, η άρνηση δρα μόνο στον αμέσως δεξιά της ευρισκόμενο τύπο, μαζί με τον οποίο δημιουργούν ένα νέο τύπο. Συνεπώς, δεν είναι αναγκαίο να συνοδεύεται από παρενθέσεις για να δηλώσουμε την εμβέλειά της. Αυτή προσδιορίζεται από τα ζεύγη παρενθέσεων που συνοδεύουν τους διθέσιους συνδέσμους και από την προαναφερθείσα παραδοχή. Για παράδειγμα, το ¬Π είναι ένας τύπος, όπου η άρνηση δρα στον Π. (Η εμβέλεια της είναι το Π). Ο ¬¬Π είναι επίσης ένας τύπος, όπου η πρώτη άρνηση δρα στον τύπο ¬Π, αφού αυτός είναι που βρίσκεται δεξιά της. Και για τον ¬Π και για τον ¬¬Π λοιπόν δεν είναι αναγκαίες οι παρενθέσεις. Αν όμως θεωρήσουμε τη διαδοχή των συμβόλων ¬Π ∧ Ρ, υπάρχουν δύο εναλλακτικές περιπτώσεις κατασκευής τύπου με αυτήν. Το ποιες είναι αυτές καθορίζονται από τον προσδιορισμό της εμβέλειας του διθέσιου συνδέσμου ∧ και κατά συνέπεια από τη χρήση των παρενθέσεων που αναδεικνύουν αυτήν την εμβέλεια. Βεβαίως στην ακτίνα δράσης του ∧ στα δεξιά του περιλαμβάνεται σε κάθε περίπτωση η προτασιακή μεταβλητή Ρ. Αριστερά του τώρα μπορεί να περιλαμβάνει μόνον την προτασιακή μεταβλητή Π ή τη διαδοχή ¬Π. Στην πρώτη περίπτωση, αφού η δράση του ∧ εκτείνεται μόνο στις Π και Ρ, ο ∧ συνοδεύεται με ζεύγος παρενθέσεων. Αυτό περιλαμβάνει μαζί με τον ∧ μόνον ό,τι εμπίπτει στην ακτίνα δράσης του. Δηλαδή, περικλείει τη συμβολική έκφραση Π∧Ρ, οπότε το ¬ παραμένει εκτός των παρενθέσεων. Έτσι, έχουμε τον τύπο ¬(Π∧Ρ). Εδώ βεβαίως, λόγω της παραδοχής που προαναφέραμε σχετικά με την άρνηση, αυτή δρα στον ενιαίο τύπο Π∧Ρ που βρίσκεται στα δεξιά της και περικλείεται στο ζεύγος παρενθέσεων. Είναι φανερό πως αποτελεί τον κύριο σύνδεσμο του τύπου ¬(Π∧Ρ). Στη δεύτερη περίπτωση, αφού η εμβέλεια του ∧ περιλαμβάνει το ¬Π, ο τύπος είναι ¬Π∧Ρ. Αυτή η γραφή δηλώνει ότι ο ∧ δρα στο ¬Π, δηλαδή και στην άρνηση. Λόγω των

παραδοχών μας δεν υπάρχει καμία σύγχυση. Ο ∧ δρα στον τύπο ¬Π και στο Ρ και ο ¬μόνον στο Π. Το να δηλωθεί αυτό με τη χρήση ενός ζεύγους παρενθέσεων, οπότε θα είχαμε τον τύπο (¬Π)∧Ρ, είναι περιττό. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο προσδιορισμός της εμβέλειας των διθέσιων συνδέσμων και η παραδοχή για την εμβέλεια της άρνησης αρκούν για να προσδιοριστεί η ακτίνα δράσης της. Στη συνέχεια θα δούμε ορισμένους τύπους και το πώς κατασκευάζονται με βάση τους κανόνες που αναφέραμε εδώ.

Τα Π και Ρ είναι τύποι λόγω του 1ου κανόνα. Αφού το Π είναι τύπος, τότε λόγω του 2ου κανόνα το ¬Π είναι τύπος. Αφού τα ¬Π και Ρ είναι τύποι, τότε λόγω του 3ου κανόνα το ¬Π→Ρ είναι τύπος. (Όπως είπαμε αφού θεωρείται μόνος του δεν τον περιβάλλουμε με παρενθέσεις). Επειδή τα Π και Ρ είναι τύποι, τότε λόγω του 3ου κανόνα το Ρ∨Π είναι τύπος. Λόγω του 2ου κανόνα και το ¬(Ρ∨Π) είναι τύπος. [Επειδή προσημαίνουμε τον τύπο Ρ∨Π με το ¬ και αυτός δεν είναι προτασιακή μεταβλητή ή τύπος προσημασμένος με ¬, τον περιβάλλουμε με ζεύγος παρενθέσεων]. Αφού και οι δύο, ο ¬Π→Ρ και ο ¬(Ρ∨Π) είναι τύποι, τότε λόγω του 3ου κανόνα ο (¬Π→Ρ)↔ ¬(Ρ∨Π) είναι τύπος. [Επειδή ο ¬(Ρ∨Π) είναι τύπος προσημασμένος με ¬, δεν τον περικλείουμε σε ζεύγος παρενθέσεων όταν εισάγεται ως μέρος του τελευταίου τύπου καθώς δρα σε αυτό ο διθέσιος σύνδεσμος ↔. Επειδή ο ¬Π→Ρ είναι ένας τύπος που δεν προσημαίνεται με ¬και δεν είναι προτασιακή μεταβλητή, όταν εισάγεται ως μέρος του τελευταίου τύπου περιβάλλεται με ζεύγος παρενθέσεων]. Αφού ο ¬Π είναι τύπος, τότε λόγω του 2ου κανόνα και ο ¬¬Π είναι τύπος. (Αφού ο ¬Π είναι τύπος που προσημαίνεται με ¬, δεν τον περιβάλλουμε με ζεύγος παρενθέσεων όταν πρόκειται να τον προσημάνουμε και πάλι με ¬). Βλέπουμε λοιπόν ότι με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή των πιο πάνω κανόνων μπορούμε να κατασκευάσουμε ατέλειωτο πλήθος τύπων ποικίλης πολυπλοκότητας.

Σημαντική παρατήρηση

Από τους κανόνες κατασκευής των τύπων προκύπτει ότι αν αντικαταστήσουμε κάποιες ή όλες τις προτασιακές μεταβλητές ενός τύπου με τύπους, η έκφραση που δημιουργείται είναι ένας νέος τύπος.

Ερωτήσεις

1. Πότε μια πρόταση λέγεται σύνθετη;

2. Ποιοι είναι οι κανόνες κατασκευής ενός τύπου;
3. Τι καλούμε κύριο σύνδεσμο ενός τύπου;

Ασκήσεις

1. Οι ακόλουθες συμβολικές εκφράσεις είναι τύποι:

	Σωστό	Λάθος		Σωστό	Λάθος
i. $\neg\neg\neg\Pi$			ii. $\Pi\rightarrow(P$		
iii. $(\Pi\rightarrow P)\vee T$			iv. εάν Π, τότε P		
v. $(\leftrightarrow)$			vi. $\neg\Pi\vee P$		
vii. $\neg(\Pi\vee P)$			viii. $\neg(\Pi\vee P)\rightarrow\neg T$		

2. Πόσοι τύποι υπάρχουν, οι οποίοι περιέχουν εμφανίσεις μόνον μιας προτασιακής μεταβλητής;

10. Πίνακας Αληθείας ενός Τύπου

Όπως έγινε φανερό από τα προηγούμενα,κάθε πρόταση έχει έναν τύπο και αντιστρόφως, αν στη θέση των προτασιακών μεταβλητών ενός τύπου τοποθετήσουμε προτάσεις (συνήθως απλές) παράγεται μια πρόταση. Μπορούμε να πούμε ότι ένας τύπος αποτελεί γεννήτρια προτάσεων και ότι ως τύπος κάποιας πρότασης αναπαριστά με συμβολικό τρόπο τη δομή της.

Καθώς μια σύνθετη πρόταση συγκροτείται από απλές προτάσεις και συνδέσμους, για κάθε δυνατό συνδυασμό αληθοτιμών των απλών προτάσεων προκύπτει μια αληθοτιμή για τη σύνθετη πρόταση. Ας χρησιμοποιήσουμε εδώ τα παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας για να δούμε πώς γίνεται αυτό. Αν, για παράδειγμα, η πρόταση 6 είναι ψευδής, η 7 αληθής και η 8 αληθής, τότε η συζευκτική πρόταση «θα πάω στη βιβλιοθήκη και θα συμβουλευτώ το λεξικό» είναι ψευδής, οπότε η διαζευκτική πρόταση 9 είναι αληθής. Για τον ίδιο συνδυασμό αληθοτιμών των προτάσεων 6,7 και 8 η διαζευκτική πρόταση «θα συμβουλευτώ το λεξικό ή θα διαβάσω τα αυριανά μαθήματα» είναι α-

ληθής και η συζευκτική πρόταση 10 είναι ψευδής. Ανάλογα ισχύουν βεβαίως και για κάθε πρόταση που προκύπτει από τον τύπο (Π∧Ρ)∨Τ από τον οποίο προκύπτει και η 9 ή για τον τύπο Π∧(Ρ∨Τ) της πρότασης 10. Έτσι, αν στη θέση της προτασιακής μεταβλητής Π τοποθετηθεί μια ψευδής πρόταση, στη θέση της Ρ μιας αληθής και στη θέση της Τ μια αληθής, τότε η πρόταση που προκύπτει από τον τύπο (Π∧Ρ)∨Τ είναι αληθής. (Ενώ η πρόταση που προκύπτει από τον τύπο Π∧(Ρ∨Τ) είναι ψευδής). Όπως είναι φανερό η αληθοτιμή μιας πρότασης που προκύπτει από τον τύπο αυτό δεν εξαρτάται από το νοηματικό περιεχόμενο των προτάσεων που τη συνθέτουν καθώς τις τοποθετούμε στη θέση των προτασιακών μεταβλητών, αλλά από τις αληθοτιμές τους. Αυτό βεβαίως ισχύει για κάθε τύπο και όχι μόνο για τους (Π∧Ρ)∨Τ ή Π∧(Ρ∨Τ).

Από όσα προηγήθηκαν συμπεραίνουμε ότι για κάθε συνδυασμό αληθοτιμών των προτάσεων, οι οποίες αντικαθιστούν τις προτασιακές μεταβλητές ενός τύπου, προκύπτει μια αληθοτιμή της πρότασης που παράγεται, η οποία είναι ανεξάρτητη του νοηματικού περιεχομένου αυτών των προτάσεων. Δηλαδή, οι αληθοτιμές της πρότασης που παράγεται από έναν τύπο είναι συνέπεια της λογικής δομής αυτής της πρότασης ή, με άλλα λόγια, του τρόπου με τον οποίο συγκροτείται ο τύπος της, καθώς και των αληθοτιμών των απλών προτάσεων που τη συγκροτούν. Είναι λοιπόν φανερό πως για κάθε δυνατό συνδυασμό αληθοτιμών που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές που συγκροτούν των τύπο αντιστοιχεί μια αληθοτιμή στον τύπο αυτό. **Ο πίνακας που περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς αληθοτιμών που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές ενός τύπου και τις αληθοτιμές που αντιστοιχούν στον τύπο καλείται πίνακας αληθείας του τύπου. Τέτοιοι πίνακες είναι οι πίνακες αληθείας των συνδέσμων που συναντήσαμε στα προηγούμενα.**

Ας δούμε πως καταστρώνεται ο πίνακας αληθείας ενός τύπου. Ας θεωρήσουμε τον τύπο Π∧(Ρ∨Τ). Αυτός δομείται από τις προτασιακές μεταβλητές Π,Ρ,Τ, τους συνδέσμους ∨, ∧ και παρενθέσεις. Η κατασκευή του γίνεται με την ακόλουθη διαδοχή βημάτων:

- σχηματίζουμε τον τύπο Ρ∨Τ,
- σχηματίζουμε τον τύπο Π∧(Ρ∨Τ).

Ακολουθώντας ακριβώς τα βήματα με τα οποία κατασκευάζεται ο τύπος Π∧(Ρ∨Τ), βρίσκουμε την αληθοτιμή που αντιστοιχεί σε αυτόν για κάθε δυνατό συνδυασμό αληθοτιμών που αντιστοιχούν στις μεταβλητές Π,Ρ,Τ:

Για έναν οποιονδήποτε συνδυασμό αληθοτιμών που αντιστοιχούν στα Π,Ρ,Τ:

- βρίσκουμε τις αληθοτιμές που αντιστοιχούν στο Ρ∨Τ, (πίνακας αληθείας της διάζευξης)
- βρίσκουμε τις αληθοτιμές που αντιστοιχούν στον Π∧(Ρ∨Τ), (πίνακας αληθείας της σύζευξης)

Αυτά τα βήματα για κάθε συνδυασμό αληθοτιμών συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα, ο οποίος είναι ο πίνακας του τύπου Π∧(Ρ∨Τ).

Πίνακας 13

Π	Ρ	Τ	Ρ∨Τ	Π∧(Ρ∨Τ)
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Οι γραμμές του περιέχουν τους δυνατούς συνδυασμούς αληθοτιμών που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές που συγκροτούν τον τελικό τύπο και οι στήλες του αντιστοιχούν στους διαφόρους τύπους που εμφανίζονται καθώς τον κατασκευάζουμε.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα αληθείας του τύπου (Π∧Ρ)∨Τ:

Πίνακας 14

Π	Ρ	Τ	Π∧Ρ	(Π∧Ρ)∨Τ
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Συγκρίνοντας την 6η και 8η γραμμή αυτών των πινάκων βλέπουμε ότι στους τύπους Π∧(Ρ∨Τ) και (Π∧Ρ)∨Τ αντιστοιχούν διαφορετικές αληθοτιμές. Έτσι επιβεβαιώνεται αυτό που διαπιστώνουμε, με τη βοήθεια του γλωσσικού μας αισθητήριου, μελετώντας τις προτάσεις 10 και 9 που αντιστοιχούν σε αυτούς, ότι δηλαδή δεν είναι ταυτόσημες. Οι δύο πιο πάνω τύποι δομούνται ακριβώς από τα ίδια συστατικά διατεταγμένα με τον ίδιο τρόπο, εκτός από το ζεύγος των παρενθέσεων. Η διαφορετική θέση τους σε αυτούς αρκεί για να μεταβάλει τη λογική συμπεριφορά τους. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει για τις δύο αντίστοιχες προτάσεις 10 και 9 και για τη θέση του κόμματος σε αυτές. Είναι φανερό ότι η θέση των παρενθέσεων στους τύπους πολλές φορές έχει καθοριστική σημασία για τη λογική συμπεριφορά τους, όπως και η θέση των σημείων στίξης πολύ συχνά είναι σημαντική για τη σημασία των προτάσεων.

Ερωτήσεις

1. Τι είναι ο πίνακας αληθείας ενός τύπου;
2. Πόσες γραμμές έχει ο πίνακας αληθείας ενός τύπου αν περιέχει εμφανίσεις
   i. μόνον μιας μεταβλητής;
   ii. μόνον δύο μεταβλητών;
   iii. μόνον τριών μεταβλητών;

Ασκήσεις

1. Να κατασκευαστούν οι πίνακες αληθείας των ακολούθων τύπων:

i. ¬(¬Ρ)↔Π ii. ¬(Π∧¬Π) iii. (Π∨Ρ)↔(Ρ∨Π)
iv. ¬(Π∧Ρ)↔(¬Π∨¬Ρ) v. ¬(Π→Ρ)↔(Π∧¬Ρ)
vi. (Π→Ρ)↔(¬Π∨Ρ)

2. Ποια είναι η τιμή αληθείας των ακολούθων προτάσεων;
   i. «Αν ο πέντε είναι άρτιος, τότε αν ο 7 είναι περιττός, ο Γαλαξίας μας περιλαμβάνει 10^9+153 άστρα».
   ii. «Το Παρίσι είναι πρωτεύουσα της Αγγλίας όταν και μόνον όταν το τέσσερα δεν είναι περιττός».
   iii. «Δεν ισχύει ότι: το επτά είναι περιττός και το τέσσερα δεν είναι άρτιος».

11. Παράφραση, Μετάφραση, Τυποποίηση

Όπως έχουμε πει στα προηγούμενα, για ευκολία και συντομία έχουν επινοηθεί διάφορα σύμβολα για τους συνδέσμους και χρησιμοποιούνται οι προτασιακές μεταβλητές για να δηλώσουν προτάσεις. Με τη βοήθεια αυτών και των παρενθέσεων έχει δομηθεί μια τεχνητή γλώσσα την οποία χρησιμοποιούμε για να μελετήσουμε ορισμένες έννοιες, οι οποίες είναι πολύ σημαντικές για τη σπουδή και κατανόηση της φυσικής γλώσσας, αλλά και για την ανάπτυξη της επιστήμης. Τέτοιες είναι οι έννοιες της αλήθειας, για την οποία έχουμε ήδη μιλήσει, του επιχειρήματος και της εγκυρότητας, που θα εξετάσουμε στη συνέχεια, και πολλές άλλες. Η τεχνητή γλώσσα υφίσταται και λειτουργεί με βάσει τους δικούς της κανόνες παράλληλα προς τη φυσική γλώσσα. Αυτό θυμίζει κατά κάποιο τρόπο τη σχέση της γλώσσας μας με την αγγλική γλώσσα, για παράδειγμα. Και οι δυο έχουν τους κανόνες τους και λειτουργούν παραλλήλως. Χρησιμοποιώντας τη μια από αυτές μπορούμε να μελετούμε ορισμένες ιδιότητες της άλλης. Μεταξύ των λέξεων της μιας και των λέξεων της άλλης υφίσταται μια σημαντική αντιστοιχία που ορίζεται από μια σχέση: τη σχέση να εκφράζουν (ή σημαίνουν ή συμβολίζουν) το ίδιο πράγμα. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα την αγγλική λέξη *snow* και την ελληνική λέξη *χιόνι*. Η σχέση των δύο αυτών λέξεων είναι ότι έχουν την ίδια σημασία, αποτελούν σημεία/σύμβολα της ιδίας ατομικότητας. Είναι συνεπώς αντίστοιχες κατά τη σχέση αυτή.

Η απόσταση που υπάρχει μεταξύ των παράλληλων λειτουργιών δύο γλωσσών γεφυρώνεται με μια διαδικασία, η οποία επιτρέπει την επικοινωνία μεταξύ των προσώπων: με τη **μετάφραση.** Η μετάφραση είναι μια πολύπλοκη και δύσκολα οριζόμενη διαδικασία. Μπορούμε να πούμε ότι με τη μετάφραση αποδίδουμε τη σημασία λέξεων και προτάσεων εκφρασμένων στη μια γλώσσα με λέξεις και προτάσεις της άλλης γλώσσας. Με άλλα λόγια, η μετάφραση είναι η διαδικασία με την οποία αντικαθιστούμε τις λέξεις της μιας γλώσσας με τις αντίστοιχες (κατά τη σημασία) λέξεις της άλλης.

Για παράδειγμα οι λέξεις που προαναφέραμε, *snow* και *χιόνι*, σε μια μετάφραση από τα αγγλικά στα ελληνικά ή αντιστρόφως, η μια από αυτές αντικαθιστά την άλλη.

Κάτι ανάλογο ως διαδικασία, αλλά πολύ διαφορετικό ως ποιοτικό περιεχόμενο, υπάρχει και σε σχέση με τη φυσική γλώσσα και τη συμβολική γλώσσα της λογικής, το οποίο καλούμε επίσης μετάφραση. Η μετάφραση είναι η διαδικασία με την οποία τις διάφορες προτάσεις της φυσικής γλώσσας τις αντικαθιστούμε με προτασιακούς τύπους και αντιστρόφως, με βάση μιαν αντιστοιχία που καθορίζουμε εμείς. Η μετάφραση από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική καλείται και **τυποποίηση**.

Η φυσική γλώσσα είναι δομικά πολυσύνθετη και σημασιολογικά πολυεπίπεδη. Εμπερικλείει φαινόμενα που δύσκολα συλλαμβάνονται και αποδίδονται σε μια τεχνητά κατασκευασμένη γλώσσα, όπως είναι η συμβολική γλώσσα της λογικής. Τέτοια φαινόμενα είναι, για παράδειγμα, η μεταφορά, η αμφισημία, η ελλειπτικότητα στην έκφραση κτλ. Το γεγονός αυτό κάνει τη μετάφραση, και ιδιαιτέρως την τυποποίηση, μερικές φορές εξαιρετικώς δυσχερή. Όπως έχουμε πει στα προηγούμενα, ο τύπος που αντιστοιχεί σε μια (σύνθετη) πρόταση ουσιαστικά αναδεικνύει τη δομή της. Αν η δομή των προτάσεων γίνει με κάποιο τρόπο εμφανής, τότε η τυποποίησή τους γίνεται ευχερής. Για να γίνει λοιπόν η τυποποίηση πιο εύκολη καταφεύγουμε στην **παράφραση**. Η παράφραση είναι η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε μια πρόταση που έχει την ίδια σημασία με μια πρόταση που θέλουμε να τυποποιήσουμε, αλλά διαφορετική μορφή από αυτή. Συχνά την πρόταση που βρίσκουμε την καλούμε **παράφραση της δοσμένης πρότασης**. Συνήθως επινοούμε μια παράφραση της δοσμένης πρότασης που αναδεικνύει τη λογική δομή της, συχνά όμως σε βάρος της λιτότητας και κομψότητας τη γλώσσας. Όταν παραφράζουμε μια πρόταση έχου-

Ιστορία 1η ***Ο Ράσελ και ο Πάπας***

Ένας φιλόσοφος ταράχτηκε όταν ο Ράσελ του είπε ότι μια ψευδής πρόταση συνεπάγεται οποιαδήποτε πρόταση. Ο φιλόσοφος είπε: Εννοείς ότι από την πρόταση "δύο και δύο κάνουν πέντε" έπεται ότι εσύ είσαι ο Πάπας; Ο Ράσελ απάντησε: Ναι, και κατασκεύασε την εξής απόδειξη:

- *Έστω ότι 2+2=5*
- *Αφαιρώντας το 2 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης παίρνουμε 2=3*
- *Εναλλάσσοντας τα μέλη της εξίσωσης παίρνουμε 3=2*
- *Αφαιρώντας το 1 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης παίρνουμε 2=1.*

Ο Πάπας και εγώ είμαστε δύο, αλλά αφού δύο ίσον ένα, έπεται ότι ο Πάπας και εγώ είμαστε ένα. Συνεπώς, εγώ είμαι ο Πάπας.

με ως στόχο μας να κάνουμε φανερά τα δομικά στοιχεία της, δηλαδή τους συνδέσμους και τις απλές προτάσεις που τη συνθέτουν. Η παράφραση μιας πρότασης είναι μια σαφέστερη, αλλά συνήθως άκομψη επαναδιατύπωσή της. Αυτό που είναι σημαντικό για τη διαδικασία της τυποποίησης είναι το γεγονός πως αφού η παράφραση μιας πρότασης είναι ταυτόσημη με την πρόταση θα αντιστοιχεί στον ίδιο τύπο με εκείνη. Συνεπώς, βρίσκοντας τον τύπο της παράφρασης μιας πρότασης έχουμε βρει τον τύπο της πρότασης. Όσα είπαμε εδώ γίνονται περισσότερο κατανοητά με τον ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα. Να εκφραστούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις.

(1) Το αλάτι δεν είναι χημική ένωση αλλά στοιχείο.

(2) Το αλάτι δεν είναι χημική ένωση και στοιχείο.

(3) Το αλάτι δεν είναι χημική ένωση και δεν είναι στοιχείο.

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτες προτάσεις διαφέρουν μόνον κατά μια λέξη. Η (2) προκύπτει από την (1) αν αντικαταστήσουμε τη λέξη *αλλά* με τη λέξη *και*. Όπως έχουμε πει, και οι δύο λέξεις από άποψη λογική θεωρούνται ότι εκφράζουν σύζευξη. Συνεπώς, με μια επιπόλαιη αντιμετώπιση, μπορεί κανείς να πει ότι οι δύο προτάσεις έχουν ακριβώς την ίδια λογική δομή και επομένως αντιστοιχούν στον ίδιο τύπο (ή έχουν τον ίδιο τύπο). Αν όμως παραφράσουμε τις δύο προτάσεις βλέπουμε ότι τα πράγματα είναι διαφορετικά. Ας δούμε πρώτα την (1).

Σε πρώτο βήμα εξετάζουμε ποιοι σύνδεσμοι υπάρχουν σε αυτήν. Η παρουσία των λέξεων *δεν* και *αλλά* δείχνει ότι υπάρχει άρνηση και σύζευξη.

Σε δεύτερο βήμα προσδιορίζουμε ποιες απλές προτάσεις αποτελούν μέρη της (1) ξεχνώντας προσωρινά τους συνδέσμους. Παρατηρούμε ότι η μια πρόταση είναι η:

(1α) το αλάτι είναι χημική ένωση,

ενώ η δεύτερη είναι η:

(1β) το αλάτι είναι στοιχείο,

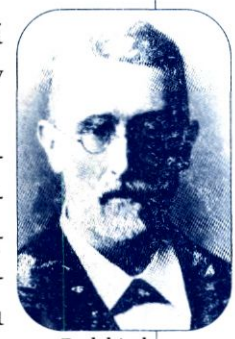
η οποία εμφανίζεται στην (1) με την ελλιπέστατη μορφή της λέξης *στοιχείο* που ακολουθεί τον σύνδεσμο *αλλά*. Ως τρίτο βήμα προσδιορίζουμε την ακτίνα δράσης των δύο συνδέσμων. Είναι φανερό ότι η άρνηση δρα στην (1α), ενώ η σύζευξη συνδέει την άρνηση της (1α) και την (1β).

Τώρα μπορούμε να δώσουμε μια πρώτη παράφραση της (1):

(1′) το αλάτι δεν είναι χημική ένωση αλλά το αλάτι είναι στοιχείο.

Τέλος αφού το *αλλά* συμπεριφέρεται λογικά ως σύζευξη, δίνουμε μια τελική παράφραση:

(1″) το αλάτι δεν είναι χημική ένωση και το αλάτι είναι στοιχείο.


Dedekind

Αν επιλέξουμε την προτασιακή μεταβλητή Π για να αντιστοιχεί στην (1α) και την Ρ για την (1β), τότε ο τύπος που αντιστοιχεί στην (1″), και συνεπώς και στην (1), είναι ο ¬Π∧Ρ.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία παρατηρούμε ότι στην (2) υπάρχει επίσης άρνηση και σύζευξη. Οι δύο απλές προτάσεις που συνθέτουν την (2) είναι οι (1α) και (1β). Εδώ πρέπει να προσέξουμε αυτό που διαφοροποιεί τις προτάσεις (1) και (2). Η εμβέλεια των συνδέσμων είναι διαφορετική στην κάθε μια. Στην (2) η σύζευξη συνδέει τις (1α) και (1β), ενώ η άρνηση δρα σε ολόκληρη τη συζευκτική πρόταση και όχι μόνο στην μια από αυτές, όπως συμβαίνει στην (1). Παρατηρούμε ότι η λέξη *αλλά* της (1) παρ' ότι συμπεριφέρεται λογικά ως σύζευξη παρουσιάζει μια εννοιολογική διαφοροποίηση ως προς τη λέξη *και* της (2) που την κάνει να αλλάζει τη σημασία ολόκληρης της πρότασης. Ουσιαστικά με τη χρήση της λέξης *αλλά* από τη μια πλευρά επιτυγχάνεται η σύζευξη δύο προτάσεων, αλλά από την άλλη τονίζεται μια ποιοτική διαφορά των δύο συνδεομένων προτάσεων, μια αντίθεση: η πρώτη είναι άρνηση, ενώ ή δεύτερη όχι.

Μια πρώτη παράφραση της (2) λοιπόν είναι η:

(2′) δεν ισχύει ότι το αλάτι είναι χημική ένωση και ότι το αλάτι είναι στοιχείο ή

(2″) δεν ισχύει το ακόλουθο: το αλάτι είναι χημική ένωση και το αλάτι είναι στοιχείο.

Συνεπώς, ο τύπος της (2″), και επομένως και της (2), είναι ο ¬(Π∧Ρ).

Στην (3) υπάρχουν δύο αρνήσεις και μια σύζευξη. Οι απλές προτάσεις που τη συνθέτουν είναι οι (1α) και (1β). Η πρώτη άρνηση δρα μόνον στην (1α) ενώ η δεύτερη δρα μόνον στην (1β). Η σύζευξη συνδέει τις αρνήσεις των (1α) και (1β). Μια παράφραση της (3) είναι η ακόλουθη:

(3′) Το αλάτι δεν είναι χημική ένωση και το αλάτι δεν είναι στοιχείο.

Ο τύπος της (3′), και συνεπώς της (3), είναι ο ¬Π∧¬Ρ.

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε τυποποίηση;
2. Τι καλούμε παράφραση μιας πρότασης;

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν προτάσεις της φυσικής γλώσσας που έχουν τους ακόλουθους τύπους:

   i. $\neg\Pi\vee P$ ii. $\neg(\Pi\vee P)$ iii. $\Pi\rightarrow(P\vee\neg T)$

   iv. $(\Pi\wedge\neg P)\rightarrow T$ v. $\Pi\rightarrow(P\rightarrow T)$ vi. $(\neg\Pi\rightarrow(T\vee P))\wedge\Sigma$
2. Να τυποποιηθούν οι ακόλουθες προτάσεις:

   i. «Οι πέντε είναι περιττός, ενώ ο τέσσερα είναι άρτιος».

   ii. «Ο πύργος του Eiffel δε βρίσκεται στην Αγγλία αν το Παρίσι είναι πρωτεύουσα της Γαλλίας».

   iii. «Κάνω περίπατο μόνον αν έχει καλό καιρό».

   iv. «Το σπίτι είναι ζεστό στην περίπτωση που το τζάκι είναι αναμμένο».

   v. «Δεδομένου ότι το επτά είναι πρώτος αριθμός, δεν είναι άρτιος».

   vi. «Για να είναι ζεστό το σπίτι αρκεί να είναι αναμμένο το καλοριφέρ».

   vii. «Ένας οργανισμός για να είναι φυτό πρέπει να έχει χλωροφύλλη».

12. Παραδείγματα Τυποποίησης

Παράδειγμα 1. Να τυποποιηθεί η ακόλουθη έκφραση.

(1) Έξω βρέχει ή χιονίζει. Στην τελευταία περίπτωση ο δρόμος γλιστράει.

Εδώ υπάρχει μια διάζευξη που εκφράζεται από τη λέξη, *ή*, μια σύζευξη που αντιστοιχεί στην τελεία και μια συνεπαγωγή, καθώς η πρό-

ταση μετά την τελεία είναι σαφώς υποθετική. Οι προτάσεις που συνθέτουν την (1) είναι οι:

(1α) έξω βρέχει,
την οποία αντιστοιχούμε στην προτασιακή μεταβλητή Π,
(1β) έξω χιονίζει,
την οποία αντιστοιχούμε στην Ρ,
(1γ) ο δρόμος γλιστράει,
την οποία αντιστοιχούμε στην Τ.

Είναι φανερό πως η έκφραση *στην τελευταία περίπτωση* δηλώνει την πρόταση (1β). Η διάζευξη συνδέει τις προτάσεις (1α) και (1β) και η συνεπαγωγή την (1β) που είναι ο ηγούμενος όρος, και την (1γ), που είναι ο επόμενος όρος αυτής. Τέλος, η σύζευξη είναι φανερό πως συνδέει τη διαζευκτική και την υποθετική πρόταση.

Μια παράφραση της (1) είναι η:

(1′) Έξω βρέχει ή έξω χιονίζει. Αν έξω χιονίζει, τότε ο δρόμος γλιστράει.

Η διαζευκτική πρόταση έχει τύπο Π∨Ρ. Η συνεπαγωγή έχει τύπο Ρ→Τ. Καθώς οι δύο τύποι πρέπει να συνδεθούν με σύζευξη για να δώσουν τον τύπο της (1′) είναι απαραίτητο να περιβληθούν με ζεύγος παρενθέσεων που προσδιορίζει την εμβέλεια των συνδέσμων τους, για να αποφύγουμε αλληλοεπικάλυψη αυτών. (Τρίτος κανόνας κατασκευής τύπων). Έτσι, ο τύπος της (1′), και συνεπώς της (1), είναι ο (Π∨Ρ)∧(Ρ→Τ). Ο κύριος σύνδεσμος είναι η σύζευξη.

Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι το ότι, **στην περίπτωση που σε μια σύνθετη πρόταση υπάρχουν εκφράσεις ή προτάσεις, οι οποίες εξαρτώνται νοηματικά από άλλες προτάσεις της, τότε σε μια παράφρασή της πρέπει να τις αντικαθιστούμε με ταυτόσημες προτάσεις που όμως δεν αντλούν τη σημασία τους από άλλες**. Στο πιο πάνω παράδειγμα αντικαθιστούμε τις εκφράσεις *χιονίζει* και *στην τελευταία περίπτωση* με δύο εμφανίσεις της πρότασης (1β), η οποία έχει την ίδια σημασία με αυτές.Η έκφραση *χιονίζει* για να θεωρηθεί πρόταση, δηλαδή για να μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε αληθή ή ψευδή, πρέπει να περιέχει έναν τοπικό προσδιορισμό. Εδώ αυτόν το ρόλο τον παίζει το *έξω* που υπάρχει στην (1α) καθώς υπονοείται ότι χιονίζει έξω και όχι στον Βόρειο Πόλο, για παράδειγμα. Άρα, η έκφραση *χιονίζει* εξαρτάται νοηματικά από την (1α). Προσθέτοντας το *έξω* και σε αυτήν, γίνεται η (1β) και καθίσταται ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες προτάσεις. Η έκφραση *στην τελευταία περίπτωση* αναφέρεται καθ' ο-

λοκληρία στην έκφραση *χιονίζει*, είναι συνεπώς απολύτως εξαρτημένη από αυτή και για το λόγο αυτόν αντικαθίσταται επίσης με την (1β).

Παράδειγμα 2. Να τυποποιηθεί η ακόλουθη έκφραση.

(2) Ο Κίσαβος δεν είναι ψηλότερος από τον Όλυμπο ή τον Ταΰγετο. Αλλά, αν ο Ταΰγετος είναι χαμηλότερος από τον Κίσαβο, δεν είναι και ο Όλυμπος χαμηλότερος από τον Κίσαβο.

Παρατηρούμε ότι στη (2) υπάρχουν δύο αρνήσεις που εκφράζονται με τη λέξη *δεν*, μια διάζευξη που εκφράζεται με τη λέξη *ή*, μια σύζευξη που εκφράζεται με την ταυτόχρονη παρουσία της τελείας και της λέξης *αλλά* και μια συνεπαγωγή, όπως φαίνεται από την παρουσία της λέξης *αν*.

(Η (2) δομείται από τις ακόλουθες απλές προτάσεις.

(2α) ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Όλυμπο,

(2β) ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Ταΰγετο,

(2γ) ο Ταΰγετος είναι χαμηλότερος από τον Κίσαβο,

(2δ) ο Όλυμπος είναι χαμηλότερος από τον Κίσαβο.

Το πρώτο μέρος της (2) έχει την ίδια σημασία με την πρόταση: «δεν είναι αλήθεια ότι ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Όλυμπο ή ότι ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Ταΰγετο», δηλαδή την ίδια σημασία με την: «δεν είναι αληθές το ακόλουθο: ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Όλυμπο ή ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Ταΰγετο». Συνεπώς, η διάζευξη συνδέει τις προτάσεις (2α) και (2β), ενώ η άρνηση δρα στη διάζευξη.

Το δεύτερο μέρος της (2) έχει την ίδια σημασία με την πρόταση: «αν ο Ταΰγετος είναι χαμηλότερος από τον Κίσαβο, τότε ο Όλυμπος δεν είναι χαμηλότερος από τον Κίσαβο». Είναι φανερό πως εδώ η άρνηση δρα στη (2δ) και πως η συνεπαγωγή έχει ως ηγούμενο όρο την πρόταση (2γ) και ως επόμενο όρο την άρνηση της (2δ). Η σύζευξη συνδέει τα δύο μέρη της (2).

Από όσα προηγήθηκαν είναι φανερό πως αυτή έχει την ίδια σημασία με την:

(2′) Δεν είναι αληθές το ακόλουθο: ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Όλυμπο ή ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Ταϋγετο. (Και) Αν ο Ταΰγετος είναι χαμηλότερος από τον Κίσαβο, τότε ο Όλυμπος δεν είναι χαμηλότερος από τον Κίσαβο.

Παρατηρούμε ότι οι προτάσεις (2α) και (2δ) είναι ταυτόσημες, δηλαδή έχουν την ίδια σημασία καθώς περιγράφουν το ίδιο πράγμα (ασχέτως του αν αυτό υφίσταται ή δεν υφίσταται). Επίσης οι (2β) είναι

οι (2γ) είναι ταυτόσημες. Κατά συνέπεια, στη (2) μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη (2δ) με τη (2α) και τη (2γ) με τη (2β) επιτυγχάνοντας την ακόλουθη παράφραση της (2):

(2″) Δεν είναι αληθές το ακόλουθο: ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Όλυμπο ή ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Ταΰγετο. (Και) Αν ο Κίσαβος είναι ψηλότερος από τον Ταΰγετο, τότε ο Κίσαβος δεν είναι ψηλότερος από τον Όλυμπο.

Συνεπώς, ο τύπος της (2″) και της (2) είναι ο $\neg(\Pi \vee P) \wedge (P \rightarrow \neg\Pi)$.

Από όσα προηγήθηκαν γίνεται φανερό πως πρέπει να προσέχουμε ότι, **στην περίπτωση που σε μια σύνθετη πρόταση υπάρχουν εκφράσεις ή προτάσεις με την ίδια σημασία, σε μια παράφρασή της πρέπει να τις αντικαθιστούμε όλες με ισάριθμες εμφανίσεις μιας και μόνο μιας έκφρασης που έχει την ίδια σημασία με αυτές.**

Ασκήσεις

1. Να τυποποιηθούν οι επόμενες εκφράσεις:
   i. «Αν το σπίτι είναι ζεστό, τότε είναι αναμμένο το καλοριφέρ ή το τζάκι. Αν όμως το καλοριφέρ είναι αναμμένο, τότε το τζάκι είναι σβηστό».
   ii. «Ένα κυρτό τετράπλευρο είναι ρόμβος όταν και μόνον όταν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιές του διχοτομούν τις γωνίες του».
   iii. «Αν και δε διάβασα καλά δεν πήρα άσχημο βαθμό».

13. Ταυτολογία, Αντίφαση

Ας πάρουμε τον τύπο φ: $\Pi \vee \neg\Pi$. Αν στη θέση της προτασιακής μεταβλητής Π τοποθετήσουμε την πρόταση:

(1) το φαγητό είναι νόστιμο,

παίρνουμε την πρόταση

(2) το φαγητό είναι νόστιμο ή το φαγητό δεν είναι νόστιμο.

Μπορούμε να πούμε ότι η (2) διαβεβαιώνει ότι αυτό που περιγράφει η (1) είναι πραγματικότητα ή όχι. Το γλωσσικό μας αισθητήριο μας βε-

βαιώνει ότι η πρόταση (2) είναι αληθής ανεξαρτήτως του ποια είναι η αληθοτιμή της πρότασης (1). Τις ίδιες παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε για κάθε άλλη πρόταση που προκύπτει από τον φ. Όσα είπαμε εδώ επιβεβαιώνονται κατασκευάζοντας τον πίνακα αληθείας του τύπου φ.

Frege

Πίνακας 15

Π	¬Π	φ:Π∨¬Π
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α

Παρατηρούμε ότι για κάθε αληθοτιμή που αντιστοιχεί στην προτασιακή μεταβλητή Π του τύπου φ, η αληθοτιμή που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι Α.

Κάθε τύπος, στον οποίο αντιστοιχεί η αληθοτιμή Α για κάθε δυνατό συνδυασμό των αληθοτιμών που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές που τον συγκροτούν, καλείται **ταυτολογία**.

Ο τύπος φ: Π∨¬Π είναι λοιπόν μια ταυτολογία.

Ας θεωρήσουμε τώρα τον τύπο ω: Π∧¬Π. Αν στη θέση της προτασιακής μεταβλητής Π θέσουμε την πρόταση:

(3) Ο Όλυμπος είναι ψηλότερος από τον Ταΰγετο, παίρνουμε την πρόταση:

(4) Ο Όλυμπος είναι ψηλότερος από τον Ταϋγετο, και ο Όλυμπος δεν είναι ψηλότερος από τον Ταΰγετο.

Μπορούμε να πούμε ότι η (4) μας διαβεβαιώνει ότι αυτό που περιγράφει η (3) υφίσταται και δεν υφίσταται συγχρόνως. Είναι φανερό πως η πρόταση (4) είναι ψευδής ανεξαρτήτως του αν η (3) είναι ψευδής ή αληθής. Το ίδιο μπορούμε να πούμε ότι συμβαίνει για κάθε πρόταση που προκύπτει από τον τύπο ω. Τα πιο πάνω επιβεβαιώνονται αν κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας του ω.

Πίνακας 16

Π	¬Π	Π∧¬Π
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ

Παρατηρούμε ότι για κάθε αληθοτιμή που αντιστοιχεί στην προτα-

σιακή μεταβλητή Π, η αληθοτιμή που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι Ψ.

Ένας τύπος, στον οποίο αντιστοιχεί η αληθοτιμή Ψ για κάθε δυνατό συνδυασμό των αληθοτιμών που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές του, καλείται **αντίφαση**.

Ο τύπος ω: Π∧¬Π είναι λοιπόν μια αντίφαση.

Ας κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας του τύπου χ: (Π∧Ρ)∨(Π→Ρ)

Πίνακας 17

Π	Ρ	Π∧Ρ	Π→Ρ	(Π∧Ρ)∨(Π→Ρ)
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

Παρατηρούμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας συνδυασμός των αληθοτιμών που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές του για τον οποίο η αληθοτιμή που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι Ψ και τουλάχιστον ένας συνδυασμός για τον οποίον η αληθοτιμή που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι Α. Συνεπώς ο χ δεν είναι ταυτολογία ούτε αντίφαση.

Κάθε τύπος που δεν είναι ταυτολογία ή αντίφαση λέγεται **ενδεχόμενος**.

Στη συνέχεια, για λόγους ευκολίας, αντί να χρησιμοποιούμε την έκφραση: «δυνατός συνδυασμός αληθοτιμών που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές που δομούν τον τύπο... (ή την ομάδα τύπων...)», χρησιμοποιούμε την έκφραση: «περίπτωση». Επίσης, για λόγους ευκολίας, αντί να λέμε: «στον τύπο φ αντιστοιχεί αληθοτιμή Α ή Ψ», λέμε: «ο τύπος φ έχει αληθοτιμή Α ή Ψ». Τα ίδια ισχύουν και για μια προτασιακή μεταβλητή, αφού αυτή είναι τύπος. Έτσι, για παράδειγμα, λέμε ότι **ο τύπος φ είναι ταυτολογία όταν και μόνον όταν σε κάθε περίπτωση έχει αληθοτιμή Α.**

Παρατηρήσεις

1. Κάθε πρόταση που παράγεται, αν αντικαταστήσουμε τις προτασιακές μεταβλητές μιας ταυτολογίας, με οποιεσδήποτε προτάσεις, είναι αληθής ανεξαρτήτως του τι λέει. Το αληθές της είναι ανεξάρτητο από το νοηματικό περιεχόμενο και την αληθοτιμή

των προτάσεων που τη συνθέτουν. Κάθε ταυτολογία λοιπόν είναι ένας γεννήτορας αληθών προτάσεων.

2. Ανάλογα ισχύουν για μιαν αντίφαση. Κάθε πρόταση που παράγεται, αν αντικαταστήσουμε τις προτασιακές μεταβλητές μιας ταυτολογίας με οποιεσδήποτε προτάσεις είναι αληθής ανεξαρτήτως του τι λέει. Το ψευδές της είναι ανεξάρτητο από το νοηματικό περιεχόμενο και την αληθοτιμή των προτάσεων που τη συνθέτουν. Συνεπώς, κάθε αντίφαση είναι γεννήτορας ψευδών προτάσεων.
3. Αν αντικαταστήσουμε μια ή περισσότερες προτασιακές μεταβλητές μιας ταυτολογίας με οποιουσδήποτε τύπους, προκύπτει νέα ταυτολογία. Άρα μια ταυτολογία είναι γεννήτορας άλλων ταυτολογιών. (**Κανόνας Εφαρμογής**). Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την ταυτολογία φ: $\Pi \vee \neg \Pi$ που συναντήσαμε στα προηγούμενα. Αν στη θέση της προτασιακής μεταβλητής τοποθετήσουμε τον τύπο $P \rightarrow T$, λαμβάνοντας υπόψη και τους κανόνες σχηματισμού των τύπων, παίρνουμε τον τύπο φ_1: $(P \rightarrow T) \vee \neg (P \rightarrow T)$. Αν κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας του φ_1, διαπιστώνουμε ότι αυτός αποτελεί ταυτολογία.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα πίνακα με χρήσιμες ταυτολογίες όχι για αποστήθιση, αλλά για να σχηματισθεί μια εικόνα σχετικά με κάποιες ιδιότητες που έχουν οι σύνδεσμοι.

Πίνακας 18

1	νόμος διπλής άρνησης	$\neg(\neg \Pi) \leftrightarrow \Pi$
2	νόμος αντιφάσεως	$\neg(\Pi \wedge \neg \Pi)$
3	νόμος συμπληρώματος ή αποκλείσεως τρίτου	$\Pi \vee \neg \Pi$
4	νόμος αντιμεταθετικότητας σύζευξης	$(\Pi \wedge P) \leftrightarrow (P \wedge \Pi)$
5	νόμος De Morgan για τη σύζευξη	$\neg(\Pi \wedge P) \leftrightarrow (\neg \Pi \vee \neg P)$
6	νόμος De Morgan για τη διάζευξη	$\neg(\Pi \vee P) \leftrightarrow (\neg \Pi \wedge \neg P)$
7	νόμος αντικαταστάσεως συνεπαγωγής	$(\Pi \rightarrow P) \leftrightarrow (\neg \Pi \vee P)$
8	νόμος αντιθετοαντιστροφής	$(\Pi \rightarrow P) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow \neg \Pi)$

Η διαπίστωση ότι κάθε ένας από αυτούς τους τύπους είναι ταυτολογία μπορεί να γίνει με την κατασκευή του πίνακα αληθείας του.

Σημαντική παρατήρηση

Πρέπει να πούμε ότι οι ταυτολογίες δε μας δίνουν πληροφορίες ή γνώση για τον κόσμο γιατί είναι πάντα αληθείς. Είναι όμως τρόποι με τη βοήθεια των οποίων οργανώνουμε την προϋπάρχουσα γνώση. Δε χρειάζεται να κοιτάξουμε στο πορτοφόλι μας για να βεβαιωθούμε ότι είναι αλή-

θεια πως: «το πορτοφόλι μας περιέχει ή δεν περιέχει χρήματα». Αυτό είναι πάντα αλήθεια. (Ο τύπος αυτής της πρότασης είναι ταυτολογία, και συγκεκριμένα ο νόμος της αποκλείσεως τρίτου). Η αλήθεια αυτή δε μας δίνει καμία πληροφορία σχετικά με το τι γίνεται στο πορτοφόλι μας. Για να το μάθουμε πρέπει να το ανοίξουμε και να κοιτάξουμε μέσα.

Ας κατασκευάσουμε έναν πίνακα αληθείας κοινό για τους τύπους φ:Π→Ρ, χ:¬Ρ→¬Π και φ↔χ.

Πίνακας 19

Π	Ρ	¬Π	¬Ρ	φ: Π→Ρ	χ:¬Ρ→¬Π	φ↔χ
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α

Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση οι φ και χ έχουν τις ίδιες αληθοτιμές και συνεπώς ο φ↔χ είναι ταυτολογία

Λέμε ότι δύο τύποι φ και χ είναι λογικά ισοδύναμοι όταν και μόνον όταν ο τύπος φ↔χ είναι ταυτολογία.

Είναι φανερό πως, αν οι τύποι φ και χ είναι λογικά ισοδύναμοι και ο χ είναι ταυτολογία, τότε και ο φ είναι ταυτολογία.

Δύο ταυτόσημες προτάσεις, δηλαδή δύο προτάσεις που έχουν την ίδια σημασία, ή έχουν τον ίδιο τύπο ή έχουν δύο τύπους, οι οποίοι είναι λογικά ισοδύναμοι. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Δύο λογικά ισοδύναμοι τύποι με τις ίδιες προτασιακές μεταβλητές παράγουν ζεύγη προτάσεων, οι οποίες έχουν την ίδια αληθοτιμή για κάθε δυνατό συνδυασμό τον αληθοτιμών των απλούστερων προτάσεων που τις συνθέτουν.

Ερωτήσεις

1. Τι καλείται ταυτολογία;
2. Τι ονομάζουμε αντίφαση;
3. Πότε ένας τύπος καλείται ενδεχόμενος;
4. Πότε δυο τύποι καλούνται λογικώς ισοδύναμοι;

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθοι τύποι είναι αντιφάσεις:
   i $(\Pi\wedge(\Pi\rightarrow P))\wedge\neg P$
   ii. $(\Pi\wedge\neg P)\wedge(\Pi\rightarrow P)$
   iii. $((\Pi\rightarrow P)\wedge(P\wedge T)\wedge\neg(P\wedge T)$
2. Να αποδείξετε τα ακόλουθα:
   i. Ο τύπος φ είναι ταυτολογία όταν και μόνον όταν η $\neg\varphi$ είναι αντίφαση.
   ii. Αν ο φ είναι ταυτολογία και ο χ οποιοσδήποτε τύπος, τότε ο $\varphi\vee\chi$ είναι ταυτολογία.
   iii. Αν οι φ και χ είναι τύποι, τότε η $\varphi\wedge\chi$, είναι ταυτολογία όταν και μόνον όταν και οι δύο τύποι είναι ταυτολογίες.
   iv. Αν ο φ είναι ταυτολογία, τότε για κάθε τύπο χ η $\chi\rightarrow\varphi$ είναι ταυτολογία.
   v. Αν ο φ είναι αντίφαση και ο χ τυχαίος τύπος, τότε η $\varphi\wedge\chi$ είναι αντίφαση.
   vi. Αν ο φ είναι αντίφαση και ο χ τυχαίος, τότε η $\varphi\rightarrow\chi$ είναι ταυτολογία.
   vii. Αν οι φ και χ είναι και οι δύο ταυτολογίες, ή και οι δύο αντιφάσεις, τότε η $\varphi\leftrightarrow\chi$ είναι ταυτολογία.
3. Να αποδείξετε τα ακόλουθα:
   i. Αν ο φ είναι ταυτολογία και ο χ τυχαίος τύπος, τότε ο $\varphi\wedge\chi$ είναι λογικώς ισοδύναμος προς τον χ.
   ii. Αν ο φ είναι αντίφαση και ο χ τυχαίος τύπος, τότε ο $\varphi\vee\chi$ είναι λογικώς ισοδύναμος προς τον χ.

14. Το Επιχείρημα

Ένας από τους βασικούς παράγοντες, απόκτησης και διατήρησης της γνώσης του κόσμου που μας περιβάλλει και του εαυτού μας, είναι η εμπειρία μας. Τα αισθητηριακά δεδομένα με τα οποία μας εφοδιάζουν οι αισθήσεις μας, τα βιώματά μας (συναισθήματα κτλ.) η μνήμη τους και οι πληροφορίες που έχουμε από άλλα πρόσωπα, αποτελούν

το βασικό υλικό με το οποίο αντιλαμβανόμαστε και γνωρίζουμε τον κόσμο. Η αντιληπτική και γνωστική εμβέλεια της εμπειρίας μας όμως είναι περιορισμένη σε σχέση με την πρακτικώς ατέρμονη πολυπλοκότητα και έκταση του κόσμου. Όμως γνωρίζουμε πράγματα για τα οποία δεν είχαμε ποτέ εμπειρία, δηλαδή δεν είχαμε αισθητηριακή αντίληψη, μνήμη ή πληροφόρηση. Γνωρίζουμε, για παράδειγμα, ότι το αίμα του ταράνδου είναι κόκκινο, χωρίς να έχουμε δει ποτέ τάρανδο ή το αίμα του και ας μη μας το έχει πει κανείς. Πώς έχουμε καταλήξει να το γνωρίζουμε; Έχουμε τη δυνατότητα να το γνωρίζουμε με τη βοήθεια μιας νοητικής διεργασίας, η οποία συχνά συμβαίνει αυτόματα, ίσως και ασυνείδητα, και εκτυλίσσεται κάπως έτσι:

1. γνωρίζουμε ότι κάθε θηλαστικό έχει αίμα,
2. γνωρίζουμε ότι το αίμα είναι κόκκινο,
3. γνωρίζουμε ότι ο τάρανδος είναι θηλαστικό,
4. συμπεραίνουμε ότι ο τάρανδος έχει κόκκινο αίμα.

Στο τέταρτο βήμα αυτής της διαδικασίας καταλήγουμε στο να γνωρίζουμε, ή τουλάχιστον αποκτούμε σχετική βεβαιότητα, ότι ο τάρανδος έχει κόκκινο αίμα. Με αυτόν τον τρόπο αποκτούμε γνώση πέρα από τα όρια που χαράζει η εμπειρία. Παράγουμε γνώση σχετικά με μια όψη του κόσμου μας, με μια κατάστασή του, χρησιμοποιώντας γνώσεις που ήδη κατέχουμε. Όμως η γνώση συνήθως εκφράζεται με προτάσεις που περιγράφουν την κατάσταση των πραγμάτων που γνωρίζουμε, εκφράζεται δηλαδή με αληθείς προτάσεις. Συνεπώς, με την πιο πάνω διεργασία ξε-

Ιστορία 2η Οι προβλέψεις των Προπονητών και η Κατάταξη των Ομάδων

Ζητήθηκε από τους προπονητές έξι ποδοσφαιρικών ομάδων να κάνουν από δύο προβλέψεις ο καθένας για τις θέσεις που θα κατακτήσουν οι ομάδες αυτές στο πρωτάθλημα. Στο τέλος της περιόδου ένας προπονητής είχε δύο σωστές προβλέψεις και η ομάδα του κατέκτησε την πρώτη θέση. Ένας άλλος είχε μια σωστή πρόβλεψη και η ομάδα του πήρε τη δεύτερη θέση. Καθορίστε τη θέση που κατέλαβε κάθε μια από τις έξι ομάδες, αν οι προβλέψεις ήταν οι εξής:
Προπονητής ομάδας Α: Η Β θα έρθει δεύτερη και η Ζ πέμπτη.
Προπονητής ομάδας Β: Η Ζ θα έρθει πρώτη και η Γ δεύτερη.
Προπονητής ομάδας Γ: Η Δ θα έρθει πρώτη και η Ε έκτη.
Προπονητής ομάδας Δ: Η Α θα έρθει πρώτη και η Γ τέταρτη.
Προπονητής ομάδας Ε: Η Β θα έρθει πέμπτη και η Δ τρίτη.
Προπονητής ομάδας Ζ: Η Ε θα έρθει τρίτη και η Α τέταρτη.

κινώντας από αληθείς προτάσεις παράγουμε αληθή πρόταση ή, με άλλα λόγια, βεβαιωνόμαστε σχετικά με την αλήθεια μιας πρότασης. Δηλαδή, με αυτήν καταλήγουμε στην αλήθεια μιας πρότασης βασιζόμενοι στη δεδομένη αλήθεια κάποιων προτάσεών μας. Αυτή η διεργασία καλείται **συλλογισμός.**

Συλλογισμός είναι μια νοητική διαδικασία με βάση την οποία, ξεκινώντας από μια ομάδα γνωσιακών δεδομένων που εκφράζονται με μορφή προτάσεων, καταλήγουμε σε ένα νέο γνωσιακό στοιχείο που επίσης εκφράζεται με μορφή πρότασης. Τα δεδομένα καλούνται υποθέσεις ή προκείμενες και η πρόταση στην οποία καταλήγουμε καλείται συμπέρασμα.

Το σύνολο των προτάσεων που εμφανίζονται σε ένα συλλογισμό, δηλαδή οι υποθέσεις και το συμπέρασμα, καλείται **επιχείρημα.** Το επιχείρημα είναι, δηλαδή, ο τρόπος με τον οποίο εμφανίζεται σε επίπεδο λόγου ένας συλλογισμός. Ας δούμε εδώ τις ακόλουθες δύο διαδοχές προτάσεων.

I. Αν η θερμάστρα λειτουργεί, τότε το δωμάτιο είναι ζεστό.
Η θερμάστρα λειτουργεί

Άρα, το δωμάτιο είναι ζεστό.

II Αν έχει δύσει ο ήλιος, τότε έχει ανάψει ο προβολέας
Έχει δύσει ο ήλιος.

Άρα, έχει ανάψει ο προβολέας.

Κάθε μια από αυτές τις δύο διαδοχές αποτελεί ένα επιχείρημα καθώς εκφράζει ένα συλλογισμό. Η καταγραφή των επιχειρημάτων έχει γίνει με τον εξής τρόπο:

- Γράφουμε τις υποθέσεις σε μια στήλη.
- Φέρουμε μια γραμμή που χωρίζει τις υποθέσεις από το συμπέρασμα.
- Γράφουμε το συμπέρασμα κάτω από αυτήν τη γραμμή.
- Το ότι μια πρόταση είναι συμπέρασμα δηλώνεται με κάποια χαρακτηριστική λέξη όπως **άρα, συνεπώς, συνάγεται** κτλ. που τοποθετείται πριν από αυτήν.

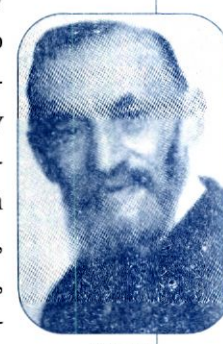
Παρατηρούμε ότι και τα δύο επιχειρήματα έχουν κάποια κοινά στοιχεία:

- Η πρώτη υπόθεση και των δύο είναι συνεπαγωγή.
- Η δεύτερη υπόθεση είναι ο ηγούμενος όρος της συνεπαγωγής.
- Το συμπέρασμα είναι ο επόμενος όρος της συνεπαγωγής.

Είναι λοιπόν φανερό πως και τα δύο επιχειρήματα προκύπτουν από μια και μόνο μια ομάδα τύπων, που περιλαμβάνει τους Π→Ρ, Π και Ρ διαταγμένους ως εξής:

$$\begin{array}{l} \Pi \rightarrow P \\ \underline{\Pi \qquad} \\ P \end{array}$$

Το επιχείρημα Ι προκύπτει, αν στη θέση του Π τοποθετήσουμε την πρόταση «η θερμάστρα λειτουργεί» και στη θέση του Ρ την πρόταση «το δωμάτιο είναι ζεστό». Το επιχείρημα ΙΙ προκύπτει, αν στη θέση του Π τοποθετήσουμε την πρόταση «έχει δύσει ο ήλιος» και στη θέση του Ρ την πρόταση «έχει ανάψει ο προβολέας». Είναι φανερό λοιπόν ότι κάθε επιχείρημα ανάγεται σε μια διαδοχή τύπων και αντιστρόφως, μια διαδοχή τύπων μπορεί να παραγάγει επιχειρήματα. Κάθε διαδοχή τύπων υ_1, υ_2, υ_3,..., $\upsilon_{\nu-1}$, υ_ν, σ καλείται **σχήμα επιχειρήματος**, αν θεωρήσουμε ότι οι υ_1, υ_1, υ_1, ..., $\upsilon_{\nu-1}$, υ_ν αντιστοιχούν στις υποθέσεις και ο σ αντιστοιχεί στο συμπέρασμα ενός επιχειρήματος. Οι τύποι υ_1, υ_2, υ_3, ..., $\upsilon_{\nu-1}$, υ_ν, σ καλούνται όροι του σχήματος επιχειρήματος.


Peano

Στη συνέχεια, τους τύπους υ_1, υ_2, υ_3, ..., $\upsilon_{\nu-1}$, υ_ν τους καλούμε, για λόγους ευκολίας, **υποθέσεις** και τον τύπο σ τον καλούμε **συμπέρασμα**. Για να δηλώσουμε ότι η διαδοχή υ_1, υ_2, υ_3, ..., $\upsilon_{\nu-1}$, υ_ν, σ αποτελεί σχήμα επιχειρήματος χρησιμοποιούμε κάποια από τις ακόλουθες εκφράσεις:

- «υ_1, υ_2, υ_3, ..., $\upsilon_{\nu-1}$, υ_ν άρα σ»
- «από υ_1, υ_2, υ_3, ..., $\upsilon_{\nu-1}$, υ_ν συνάγεται ότι σ»
- «υ_1, υ_2, υ_3, ..., $\upsilon_{\nu-1}$, υ_ν ακολουθεί σ»
- «υ_1, υ_2, υ_3, ..., $\upsilon_{\nu-1}$, υ_ν παράγουν σ»

ή την ακόλουθη διάταξη:

$$\begin{array}{c} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \underline{\upsilon_\nu \qquad} \\ \sigma \end{array}$$

Ερωτήσεις

1. Τι καλούμε επιχείρημα;
2. Τι είναι ένα σχήμα επιχειρήματος;

Ασκήσεις

1. Σε ποια σχήματα επιχειρήματος αντιστοιχούν τα ακόλουθα επιχειρήματα;

i. Αν n προσωπικότητα υπάρχει και μετά το θάνατο, τότε αυτή δεν είναι ένα ζωντανό σώμα.
Η προσωπικότητα δεν είναι ένα νεκρό σώμα.
Αν n προσωπικότητα είναι σώμα, τότε είναι νεκρό ή ζωντανό.
Η προσωπικότητα υπάρχει μετά θάνατον.

Άρα n προσωπικότητα δεν είναι ένα σώμα.

ii. Αν διαβάζεις αυτό το βιβλίο, τότε αν το βιβλίο συμφωνεί με την Αγία Γραφή, χάνεις το χρόνο σου.
Αν διαβάζεις αυτό το βιβλίο, τότε εάν το βιβλίο δε συμφωνεί με την Αγία Γραφή, αμαρτάνεις.
Αν χάνεις το χρόνο σου, τότε αμαρτάνεις.

Άρα, αν διαβάζεις αυτό το βιβλίο, τότε αμαρτάνεις.

iii. Τα ανθρώπινα όντα εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στην Αφρική και κατόπιν μετανάστευσαν σε άλλες περιοχές ή οι προγονοί τους μετανάστευσαν πριν εξελιχθούν σε ανθρώπινα όντα σε άλλες περιοχές όπου και εξελίχθηκαν στη συνέχεια.
Αν οι πρόγονοι των ανθρωπίνων όντων είχαν μεταναστεύσει από την Αφρική σε άλλες περιοχές πριν εξελιχθούν, τότε δε θα βρίσκονταν μόνο στην Αφρική απολιθώματά τους.
Απολιθώματα των προγόνων των ανθρωπίνων όντων ευρίσκονται μόνο στην Αφρική.

Άρα, τα ανθρώπινα όντα εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στην Αφρική.

15. Έγκυρο Επιχείρημα

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο σχήμα επιχειρήματος:

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi \rightarrow P \\ \Pi\end{array}}{P}$$

Σχήμα επιχειρήματος 1

από το οποίο παράγονται τα επιχειρήματα Ι και ΙΙ που είδαμε στα προηγούμενα. Ας καταστρώσουμε τον πίνακα αληθείας που περιλαμβάνει τις προτασιακές μεταβλητές Π και Ρ και τον τύπο Π→Ρ από τις οποίες συγκροτείται αυτό το σχήμα επιχειρήματος.

Πίνακας 20

	1	2	3	4	5
			(υπόθεση)	(υπόθεση)	(συμπέρασμα)
	Π	Ρ	Π→Ρ	Π	Ρ
1	Α	Α	Α	Α	Α
2	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
3	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
4	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ

(Επαναλαμβάνουμε τις δύο στήλες που αντιστοιχούν στους δυνατούς συνδυασμούς αληθοτιμών των Π και Ρ αφού αυτές συμμετέχουν και αυτόνομες ως μια υπόθεση και ως συμπέρασμα αντιστοίχως. Αυτό το κάνουμε για να φαίνεται καθαρά η φύση του σχήματος επιχειρήματος).

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει συνδυασμούς αληθοτιμών που αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές Π και Ρ για τον οποίο στις υποθέσεις Π και Π→Ρ αντιστοιχεί αληθοτιμή Α και στο συμπέρασμα Ρ αντιστοιχεί αληθοτιμή Ψ. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση οι Π→Ρ και Π έχουν αληθοτιμή Α και η Ρ έχει αληθοτιμή Α, όπως φαίνεται από τη γραμμή 1 και τις στήλες 3, 4, και 5. Αυτό σημαίνει ότι είναι τέτοια η δομή του σχήματος επιχειρήματος, ώστε κατά τη μετάβαση από τις υποθέσεις στο συμπέρασμα δεν καταργείται η αληθοτιμή Α. Με άλλα λόγια, κατά τη μετάβαση από τις υποθέσεις στο συμπέρασμα διαφυλάσσεται η αληθοτιμή Α, δηλαδή μεταφέρεται η αλήθεια από τις υποθέσεις στο συμπέρασμα. Είναι φανερό, πως για κάθε επιχείρημα που γεννάται από αυτό το σχήμα επιχειρήματος, άρα και στα πιο πάνω Ι και ΙΙ, ισχύει η εξής ιδιότητα: Δεν είναι δυνατόν όλες οι υποθέσεις του να είναι αληθείς προτάσεις και το συμπέρασμα να είναι ψευδής πρόταση. Αν συνεπώς οι υποθέσεις του είναι όλες αληθείς, τότε το συμπέρασμα είναι αληθής πρόταση. Αυτό είναι βεβαίως το βασικό ζητούμενο από ένα συλλογισμό και το αντίστοιχο επιχείρημα: Το να παράγεται αληθής πρόταση από αληθή δεδομένα ή, με άλλα λόγια να παράγεται γνώση από προϋπάρχουσα γνώση.

Ένα σχήμα επιχειρήματος $υ_1, υ_2, υ_3, ...υ_{ν-1}, υ_ν$, σ καλείται έγκυρο όταν δεν υπάρχει περίπτωση κατά την οποία κάθε ένας από τους $υ_1, υ_2,$

$υ_3, ...υ_{ν-1}, υ_ν$, έχει αληθοτιμή Α και ο σ έχει αληθοτιμή Ψ. Κατ' επέκταση, ένα επιχείρημα καλείται έγκυρο, αν γεννάται από έγκυρο σχήμα επιχειρήματος.

Είναι φανερό από όσα προηγήθηκαν ότι, **ένα επιχείρημα είναι έγκυρο όταν δεν υπάρχει περίπτωση κατά την οποία είναι αληθείς όλες οι υποθέσεις του και ψευδές το συμπέρασμα. Με άλλα λόγια, ένα επιχείρημα είναι έγκυρο όταν είναι τέτοιο, ώστε σε κάθε περίπτωση κατά την οποία όλες οι υποθέσεις του είναι αληθείς και το συμπέρασμα είναι αληθές.**

Ας δούμε τώρα το εξής επιχείρημα:

Αν ο διακόπτης είναι ανοιχτός, τότε ο φούρνος θερμαίνεται.

Ο φούρνος θερμαίνεται.

Άρα, ο διακόπτης είναι ανοιχτός.

Παρατηρούμε ότι το επιχείρημα αυτό παράγεται από τον τύπο επιχειρήματος

$$\begin{array}{l} Π \rightarrow P \\ P \\ \hline Π \end{array}$$

Σχήμα επιχειρήματος 2

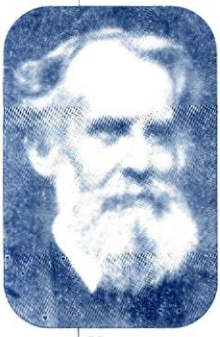
αν στη θέση του Π τοποθετήσουμε την πρόταση «ο διακόπτης είναι ανοιχτός» και στη θέση του Ρ την πρόταση «ο φούρνος θερμαίνεται». Ας καταστρώσουμε τον πίνακα αληθείας που περιλαμβάνει τις προτασιακές μεταβλητές Π και Ρ και τον τύπο Π→Ρ.

Πίνακας 21

	1	2	3	4	5
			(υπόθεση)	(υπόθεση)	(συμπέρασμα)
	Π	Ρ	Π→Ρ	Ρ	Π
1	Α	Α	Α	Α	Α
2	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
3	Ψ	Α	Α	Α	Ψ
4	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ

Παρατηρούμε ότι για τους συνδυασμούς αληθοτιμών των προτασιακών μεταβλητών Π και Ρ που αντιστοιχούν στις γραμμές 1 και 3 και οι δύο υποθέσεις Π→Ρ και Ρ του τύπου επιχειρήματος έχουν αληθοτιμή Α, αλλά το συμπέρασμα Π έχει αληθοτιμή Α μόνο για το συνδυασμό που αντιστοιχεί στη γραμμή 1. Στο συνδυασμό που αντιστοι-

λειτουργία, αλλά και στην απόδειξη της εγκυρότητας άλλων ευρύτερων σχημάτων επιχειρημάτων.


Venn

1. **Modus Ponens:** Σε κάθε περίπτωση κατά την οποία μια συνεπαγωγή και ο ηγούμενος όρος της έχουν αληθοτιμή Α, ο επόμενος όρος της έχει επίσης αληθοτιμή Α. Με άλλα λόγια: Από μια συνεπαγωγή και τον ηγούμενο όρο της συνάγεται ο επόμενος όρος της.

2. **Modus Tollens:** Σε κάθε περίπτωση κατά την οποία μια συνεπαγωγή και η άρνηση του επομένου όρου της έχουν αληθοτιμή Α, η άρνηση του ηγουμένου όρου της έχει επίσης αληθοτιμή Α. Αλλιώς: Από μια συνεπαγωγή και την άρνηση του επομένου όρου της συνάγεται η άρνηση του ηγουμένου όρου της.

3. **Υποθετικός συλλογισμός:** Αν ο επόμενος όρος μιας συνεπαγωγής είναι ίδιος με τον ηγούμενο όρο μιας δεύτερης συνεπαγωγής, τότε, σε κάθε περίπτωση κατά την οποία αυτές οι δύο έχουν αληθοτιμή Α, και η συνεπαγωγή με ηγούμενο όρο εκείνον της πρώτης και επόμενο όρο εκείνον της δεύτερης συνεπαγωγής, έχει αληθοτιμή Α. Με άλλα λόγια: Από δύο συνεπαγωγές στις οποίες ο επόμενος όρος της πρώτης είναι ο ηγούμενος της δεύτερης συνάγεται μια συνεπαγωγή της οποίας ο ηγούμενος όρος είναι εκείνος της πρώτης συνεπαγωγής και ο επόμενος όρος εκείνος της δεύτερης.

4. **Διαζευκτικός Συλλογισμός:** Σε κάθε περίπτωση κατά την οποία μια διάζευξη έχει αληθοτιμή Α και ένα από τα δύο συνδεόμενα μέρη της έχει αληθοτιμή Ψ, τότε το άλλο μέρος έχει αληθοτιμή Α. Αλλιώς: Από μια διάζευξη και την άρνηση ενός από τα μέρη της συνάγεται το άλλος μέρος της.

Παραθέτουμε εδώ έναν πίνακα με τα πιο πάνω επιχειρήματα.

Πίνακας 22

Modus Ponens	$\Pi \rightarrow P$ Π $\overline{P}$
Modus Tollens	$\Pi \rightarrow P$ $\neg P$ $\overline{\neg \Pi}$
Υποθετικός Συλλογισμός	$\Pi \rightarrow P$ $P \rightarrow T$ $\overline{\Pi \rightarrow T}$
Διαζευκτικός Συλλογισμός	$\Pi \vee P$ $\neg \Pi$ $\overline{P}$

χεί στη γραμμή 3 το συμπέρασμα έχει αληθοτιμή Ψ. Συνεπώς αυτό το σχήμα επιχειρήματος δεν είναι έγκυρο. Αυτό σημαίνει ότι είναι τέτοια η δομή του, ώστε κατά τη μετάβαση από τις υποθέσεις στο συμπέρασμα δε διατηρείται αναγκαστικά η αληθοτιμή Α. Είναι φανερό πως για κάθε επιχείρημα, όπως είναι και το πιο πάνω, που παράγεται από αυτό το σχήμα επιχειρήματος ισχύει η εξής ιδιότητα: Υπάρχει τουλάχιστον μια περίπτωση κατά την οποία όλες οι υποθέσεις του είναι αληθείς προτάσεις και το συμπέρασμα είναι ψευδής πρόταση.

Ένας συνδυασμός αληθοτιμών των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται σε ένα σχήμα επιχειρήματος τέτοιος, ώστε όλες οι υποθέσεις να έχουν αληθοτιμή Α και το συμπέρασμα αληθοτιμή Ψ ονομάζεται αντιπαράδειγμα (σε σχέση προς το ζητούμενο της εγκυρότητας του σχήματος επιχειρήματος).

Από τους πίνακες 20 και 21 αντίστοιχα βλέπουμε ότι το σχήμα επιχειρήματος 1 δεν επιδέχεται αντιπαράδειγμα, ενώ το 2 επιδέχεται ένα αντιπαράδειγμα που καλύπτει τη γραμμή 3. Από όσα προηγήθηκαν συμπεραίνουμε ότι:

Ένα σχήμα επιχειρήματος είναι έγκυρο όταν και μόνον όταν δεν έχει κανένα αντιπαράδειγμα. Ένα σχήμα επιχειρήματος είναι μη έγκυρο όταν και μόνον όταν έχει ένα τουλάχιστον αντιπαράδειγμα

Από όσα έχουμε δει μέχρι τώρα γίνεται αντιληπτό ότι το έγκυρο επιχείρημα έχει μεγάλη σημασία στη λογική διότι εκφράζει ορθό συλλογισμό. Για το λόγο αυτό ένα σημαντικό μέρος της λογικής ασχολείται με το ζήτημα του τρόπου με τον οποίο ελέγχουμε το αν ένα σχήμα επιχειρήματος είναι έγκυρο. Από όσα προηγήθηκαν είναι φανερό πως ένας τρόπος να ελέγξουμε το αν ένα επιχείρημα είναι έγκυρο ή όχι είναι ο εξής:

1. εντοπίζουμε το σχήμα επιχειρήματος από το οποίο παράγεται (ή στο οποίο αντιστοιχεί) το επιχείρημα
2. καταστρώνουμε τον πίνακα αληθείας του σχήματος επιχειρήματος
3. διαπιστώνουμε αν το σχήμα επιχειρήματος και συνεπώς το αντίστοιχο επιχείρημα είναι έγκυρο ή όχι.

Στη συνέχεια αναφερόμαστε σε μερικά σχήματα επιχειρημάτων, τα οποία παίζουν σημαντικό ρόλο στη λογική διότι χρησιμοποιούνται συχνότατα αυτόνομα στην καθημερινή μας επικοινωνία και νοητική

Αποδεικνύεται ότι **ένα σχήμα επιχειρήματος είναι έγκυρο όταν και μόνον όταν η συνεπαγωγή που έχει ως ηγούμενο όρο τη σύζευξη των υποθέσεών του και επόμενο όρο το συμπέρασμά του, είναι ταυτολογία.** Με άλλα λόγια: Το σχήμα επιχειρήματος $υ_1, υ_2, υ_3, ...υ_{V-1}, υ_v$, σ είναι έγκυρο όταν και μόνον όταν η συνεπαγωγή $(υ_1 \wedge υ_2 \wedge υ_3 \wedge ... \wedge υ_{V-1} \wedge υ_V) \rightarrow σ$ είναι ταυτολογία. Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι καταδεικνύει τη στενή σχέση των εννοιών επιχείρημα, συνεπαγωγή και ταυτολογία. Ουσιαστικά ένα έγκυρο σχήμα επιχειρήματος δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια ταυτολογία της μορφής $φ \rightarrow χ$, όπου φ και χ είναι τύποι. (Ο φ είναι η σύζευξη των υποθέσεων και ο χ είναι το συμπέρασμα). Συνεπώς, **όσα έχουμε πει για τη σχέση των ταυτολογιών με τη σκέψη και τη γλώσσα ισχύουν και για τα έγκυρα επιχειρήματα.** Αποδεικνύεται επίσης, ότι, **ένα σχήμα επιχειρήματος παραμένει έγκυρο αν αντικαταστήσουμε μια ή περισσότερες υποθέσεις ή το συμπέρασμα με λογικά ισοδύναμους τύπους.**

Ερωτήσεις

1. Πότε ένα επιχείρημα καλείται έγκυρο;
2. Τι ονομάζουμε αντιπαράδειγμα;
3. Να διατυπωθεί ο Modus Ponens.

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι τα ακόλουθα σχήματα επιχειρήματος είναι έγκυρα:

   i. $Π \rightarrow P, \neg P, \neg Π$ ii. $Π \rightarrow P, P \rightarrow T, Π \rightarrow T$

   iii. $Π \vee P, \neg Π, P$ iv. $Π, P, Π \wedge P$

   v. $Π \wedge P, Π$ vi. $Π, Π \vee P$

   vii. $Π \vee P, Π \rightarrow T, P \rightarrow Σ, T \vee Σ$ viii. $\neg T \vee \neg Σ, Π \rightarrow T, P \rightarrow Σ, \neg Π \vee \neg P$

2. Να εξετάσετε αν τα ακόλουθα επιχειρήματα είναι έγκυρα.

   i. Αν ο Καρτέσιος σκέπτεται, τότε γνωρίζει ότι υπάρχει.
   Αν γνωρίζει ότι υπάρχει, τότε υπάρχει.
   Άρα, αν σκέπτεται, τότε γνωρίζει ότι υπάρχει και υπάρχει.

   ii. Αν είμαι ελεύθερος, τότε είμαι υπεύθυνος για τις πράξεις μου.
   Αν είμαι ελεύθερος, τότε επιλέγω μόνος μου τις πράξεις μου.

Είμαι ελεύθερος.
Άρα, επιλέγω μόνος μου τις πράξεις μου και είμαι υπεύθυνος γι' αυτές.

16. Απόδειξη*

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη διαδοχή των τύπων $υ_1, υ_2, υ_3, ..., υ_{ν-1}, υ_ν, σ$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι υπάρχει μια διαδοχή τύπων $τ_1, τ_2, τ_3, ..., τ_{μ-1}, τ_μ, σ$, τέτοια, ώστε κάθε ένας από τους $τ_1, τ_2, τ_3, ..., τ_{μ-1}, τ_μ, σ$ είναι:

- κάποιος από τους $υ_1, υ_2, υ_3, ..., υ_{ν-1}, υ_ν$, ή
- κάποια ταυτολογία ή
- τύπος λογικά ισοδύναμος προς κάποιον από τους $τ_1, τ_2, τ_3, ..., τ_{μ-1}, τ_μ$, που προηγούνται αυτού ή τέλος
- το συμπέρασμα ενός εγκύρου σχήματος επιχειρήματος, του οποίου οι υποθέσεις είναι κάποιοι από τους $τ_1, τ_2, τ_3, ..., τ_{μ-1}, τ_μ$, που προηγούνται αυτού.

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι **η διαδοχή $τ_1, τ_2, τ_3, ..., τ_{μ-1}, τ_μ, σ$ είναι μια απόδειξη του σ από τους $υ_1, υ_2, υ_3, ..., υ_{ν-1}, υ_ν$.**

Αποδεικνύεται, ότι, **αν υπάρχει μια απόδειξη του τύπου σ από τους τύπους $υ_1, υ_2, υ_3, ..., υ_{ν-1}, υ_ν$, τότε το σχήμα επιχειρήματος $υ_1, υ_2, υ_3, ..., υ_{ν-1}, υ_ν$, σ είναι έγκυρο.** Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι είναι φανερό πως μπορούμε να προβούμε σε έλεγχο της εγκυρότητας ενός σχήματος επιχειρήματος με το να συγκροτήσουμε μια απόδειξη του συμπεράσματός του από τις υποθέσεις του. Σε μια τέτοια απόδειξη σημαντικό ρόλο παίζουν οι ταυτολογίες, κυρίως οι λογικές ισοδυναμίες οι οποίες διατηρούν την αληθοτιμή Α, καθώς και τα στοιχειώδη επιχειρήματα του πίνακα 22, τα οποία λειτουργούν ως αποδεικτικοί κανόνες.

Από όσα προηγήθηκαν είναι φανερό πως για να διαπιστώσουμε την εγκυρότητα ενός επιχειρήματος ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. εντοπίζουμε το σχήμα επιχειρήματος από το οποίο παράγεται το επιχείρημα.
2. συγκροτούμε μια απόδειξη του συμπεράσματός του από τις υποθέσεις του,
3. συμπεραίνουμε την εγκυρότητα του σχήματος επιχειρήματος και συνεπώς και του αντιστοίχου επιχειρήματος.

Συχνά όμως όταν θέλουμε να ελέγξουμε την εγκυρότητα ενός επιχειρήματος αντί να συγκροτήσουμε μια απόδειξη του συμπεράσματος του αντίστοιχου σχήματος επιχειρήματος από τις υποθέσεις του, την εμφανίζουμε κατ' ευθείαν ως μια διαδοχή προτάσεων της φυσικής

Ιστορία 3η — *Ο Κήπος της Εδέμ*

Όλα πήγαιναν μια χαρά στον κήπο της Εδέμ μέχρι που κάποιος έφαγε ένα μήλο από το δέντρο της γνώσης. Το αποτέλεσμα ήταν ότι κανένας δεν εμπιστευόταν πια τους άλλους. Όταν ρωτήθηκαν οι ένοικοι του κήπου για το γεγονός έδωσαν τις εξής απαντήσεις:

Αδάμ: *1. Το ψίδι έφαγε το μήλο.*
2. Το ψίδι ήταν στον κήπο.
3. Η Εύα δεν έχει ξεχορταριάσει τον κήπο.
4. Ο Άβελ δεν έκανε τη δουλειά του.

Εύα: *5. Ο Αδάμ έφαγε το μήλο.*
6. Δε λέμε όλοι στον ίδιο βαθμό την αλήθεια.
7. Ήμουν έξω ξεχορταριάζοντας τον κήπο.
8. Το ψίδι λέει ψέματα.

Κάιν: *9. Ο Άβελ έφαγε το μήλο.*
10. Ο Άβελ δεν λέει πάντα την αλήθεια.
11. Η μητέρα πάντα προτιμούσε τον Άβελ.
12. Το ψίδι δε λέει ποτέ ψέματα.

Άβελ: *13. Ο Κάιν έφαγε το μήλο.*
14. Το ψίδι δεν μπορεί να δει πάνω από το φράχτη.
15. Έκανα τη δουλειά μου.
16. Το ψίδι έφαγε το μήλο.

Φίδι: *17. Δεν ήμουν στον κήπο.*
18. Η Εύα έφαγε το μήλο.
19. Ο Κάιν είναι ο αγαπημένος γιος της Εύας.
20. Δεν μπορώ να δω πάνω από το φράχτη.

Γνωρίζοντας ότι:
(α) μόνο ένας από αυτούς έδωσε απαντήσεις που ήταν όλες αληθείς και
(β) οι υπόλοιποι είπαν κάποια ψέματα, αλλά δεν υπήρχαν δυο που έδωσαν τον ίδιο αριθμό ψευδών απαντήσεων,
να βρείτε ποιος έφαγε το μήλο.

γλώσσας και όχι ως διαδοχή τύπων. Είναι η συνήθης πρακτική που χρησιμοποιούμε κάθε φορά που εργαζόμαστε για παράδειγμα, στη Γεωμετρία ή όταν αναλύουμε κάποιες έννοιες σε ένα δοκίμιο ή στην καθημερινή επικοινωνία μας κτλ. **Αυτήν τη διαδοχή των προτάσεων την ονομάζουμε επίσης απόδειξη του συμπεράσματος του επιχειρήματος από τις υποθέσεις του.**

Ας δούμε τώρα με ένα παράδειγμα πως συγκροτείται μια απόδειξη. Εργαζόμαστε σε δύο παράλληλες στήλες. Στην πρώτη συγκροτούμε μια απόδειξη του συμπεράσματος ενός επιχειρήματος από τις υποθέσεις του που απαρτίζεται από προτάσεις της φυσικής γλώσσας. Στη δεύτερη στήλη θα συγκροτήσουμε μια απόδειξη σχετική με το αντίστοιχο σχήμα επιχειρήματος που αποτελείται από τύπους. Το επιχείρημα είναι το εξής:

«Αν ο Γιώργος βρίσκεται στο σαλόνι, τότε ακούει μουσική. Βρίσκεται στο σαλόνι ή στην κρεβατοκάμαρα. Όμως δεν είναι στην κρεβατοκάμαρα. Άρα ο Γιώργος ακούει μουσική».

Μια παράφρασή του είναι η ακόλουθη:

«Αν ο Γιώργος βρίσκεται στο σαλόνι, τότε ο Γιώργος ακούει μουσική. Ο Γιώργος βρίσκεται στο σαλόνι ή ο Γιώργος βρίσκεται στην κρεβατοκάμαρα. Ο Γιώργος δε βρίσκεται στην κρεβατοκάμαρα. Άρα ο Γιώργος ακούει μουσική».

Το σχήμα επιχειρήματος από το οποίο παράγεται αυτό είναι το ακόλουθο:

$\Pi \rightarrow P, \Pi \vee T, \neg T, P.$

Απόδειξη σχετική με το επιχείρημα	**Απόδειξη σχετική με το σχήμα επιχειρήματος**
1. Αν ο Γιώργος βρίσκεται στο σαλόνι, τότε ο Γιώργος ακούει μουσική	1. $\Pi \rightarrow P$
2. Ο Γιώργος βρίσκεται στο σαλόνι ή ο Γιώργος βρίσκεται στην κρεβατοκάμαρα.	2. $\Pi \vee T$
3. Ο Γιώργος δε βρίσκεται στην κρεβατοκάμαρα.	3. $\neg T$
4. (Από το 2, το 3 και το διαζευκτικό συλλογισμμό συνάγεται ότι ο Γιώργος βρίσκεται στο σαλόνι)	4. Π (2,3 διαζευκτικός συλλογισμός)

5. (Από το 1, το 4 και τον Modus Ponens συνάγεται ότι) 5. P (1,4 Modus Ponens)

Ο Γιώργος ακούει μουσική.

Η διαδοχή των πιο πάνω πέντε βημάτων αποτελεί απόδειξη της πρότασης «ο Γιώργος ακούει μουσική» (P) από τις υποθέσεις. Άρα, το επιχείρημα είναι έγκυρο.

Υπάρχει πληθώρα μεθόδων ή στρατηγικών με τις οποίες διεκπεραιώνουμε μιαν απόδειξη. Στη συνέχεια ασχολούμαστε με ορισμένες από αυτές.

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε απόδειξη του συμπεράσματος από τις υποθέσεις;
2. Αν υπάρχει μια απόδειξη του συμπεράσματος ενός επιχειρήματος από τις υποθέσεις του, τότε τι συμπεραίνουμε γι' αυτό;

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι το επιχείρημα iii της άσκησης 1 της ενότητας 14 είναι έγκυρο.

17. Μέθοδοι Απόδειξης I- Υποθετική Απόδειξη*

Πώς αποδεικνύουμε μια συνεπαγωγή από κάποιες υποθέσεις.

Ένας τρόπος για να αποδείξουμε **μια συνεπαγωγή στηρίζεται στο ότι ισχύει πως μια συνεπαγωγή αποδεικνύεται από μια ομάδα υποθέσεων όταν και μόνον όταν ο επόμενος όρο της αποδεικνύεται από αυτή την ομάδα αυξημένη κατά τον ηγούμενο όρο της.** Από αυτό συμπεραίνουμε ότι, αν θέλουμε να αποδείξουμε μια συνεπαγωγή, μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία, η οποία καλείται υπο-

θετική απόδειξη:

1. Επισυνάπτουμε τον ηγούμενο όρο του συμπεράσματος στις υποθέσεις του επιχειρήματος ή του τύπου επιχειρήματος.

2. Παράγουμε από τη διευρυμένη ομάδα υποθέσεων τον επόμενο όρο του συμπεράσματος.

Ας δούμε πως εφαρμόζεται η υποθετική απόδειξη με το ακόλουθο επιχείρημα:

«Αν το δωμάτιο είναι ζεστό, τότε είναι αναμμένο το τζάκι ή το καλοριφέρ. Όμως το τζάκι δεν είναι αναμμένο. Άρα, αν το δωμάτιο είναι ζεστό, τότε το καλοριφέρ είναι αναμμένο».

Μια παράφραση αυτού είναι η ακόλουθη: «Αν το δωμάτιο, είναι ζεστό, τότε το τζάκι είναι αναμμένο ή το καλοριφέρ είναι αναμμένο. Το τζάκι δεν είναι αναμμένο. Άρα, αν το δωμάτιο είναι ζεστό, τότε το καλοριφέρ είναι αναμμένο». Αυτό παράγεται από το σχήμα επιχειρήματος $Π \rightarrow P \vee T$, $\neg T$, $Π \rightarrow P$.

Απόδειξη σχετική με το επιχείρημα	**Απόδειξη σχετική με το σχήμα επιχειρήματος**
1. Αν το δωμάτιο είναι ζεστό, τότε το τζάκι είναι αναμμένο ή το καλοριφέρ είναι αναμμένο.	1. $Π \rightarrow P \vee T$
2. Το τζάκι δεν είναι αναμμένο	2. $\neg T$
3. (Έστω ότι) το δωμάτιο είναι ζεστό.	3. Π(εισάγουμε τον ηγούμενο όρο Π του $Π \rightarrow P$ ως υπόθεση.)
4. (Από το 1, το 3 και τον Modus Ponens συνάγεται ότι)το τζάκι είναι αναμμένο ή το καλοριφέρ είναι αναμμένο.	4. $P \vee T$ (1,3 Modus Pones)
5. (Από το 2, το 4 και το διαζευκτικό συλλογισμό συνάγεται ότι-το καλοριφέρ είναι αναμμένο.	5. P(2,4, διαζευκτικός συλλογισμός)

Με την πιο πάνω διαδικασία αποδείξαμε από τις υποθέσεις την πρόταση «το καλοριφέρ είναι αναμμένο» έχοντας θεωρήσει ως υπόθεση και την πρόταση «το δωμάτιο είναι ζεστό». Συνεπώς, η συνεπαγωγή «αν το δωμάτιο είναι ζεστό, τότε το καλοριφέρ είναι αναμμένο» ($Π \rightarrow P$) αποδεικνύεται από τις υποθέσεις, δηλαδή το επιχείρημα είναι έγκυρο. Για να εισάγουμε τον ηγούμενο όρο της συνεπαγωγής που θέλουμε να αποδείξουμε ως υπόθεση του επιχειρήματος χρησιμοποιού-

με συνήθως την έκφραση «έστω ότι».

Δεύτερος τρόπος για να αποδείξουμε από κάποιες υποθέσεις μια συνεπαγωγή Π→Ρ είναι να αποδείξουμε από αυτές την ¬Ρ→¬Π, που είναι λογικά ισοδύναμή της. (Νόμος αντιθετοαντιστροφής, 8η γραμμή πίνακα 18). Τρίτος τρόπος για να αποδείξουμε μια συνεπαγωγή Π→Ρ είναι να αποδείξουμε την ¬Π∨Ρ, που είναι λογικά ισοδύναμή της. (Νόμος αντικαταστάσεως της συνεπαγωγής, 7η γραμμή πίνακα 18).

Ερωτήσεις

1. Τι καλούμε υποθετική απόδειξη;

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι το επιχείρημα ii της άσκησης 1 της ενότητας 14 είναι έγκυρο.

18. Μέθοδοι Απόδειξης ΙΙ - Έμμεση Απόδειξη*

Πώς αποδεικνύουμε συμπέρασμα που είναι απλή πρόταση ή η άρνησή της, ή, αλλιώς, έναν τύπο που είναι προτασιακή μεταβλητή ή άρνηση προτασιακής μεταβλητής.

Ένας τρόπος για μια τέτοια απόδειξη στηρίζεται στο ότι ισχύει πως **ένα συμπέρασμα αποδεικνύεται από μια ομάδα υποθέσεων όταν και μόνον όταν από αυτήν την ομάδα διευρυμένη με την άρνηση του συμπεράσματος αποδεικνύεται ένας τύπος που είναι η άρνηση ενός τύπου που συναντάται σε κάποια βαθμίδα της απόδειξης.** (Δηλαδή, παράγεται μια αντίφαση της μορφής φ∧¬φ, όπου φ τυχαίος τύπος).

Για να αποδείξουμε, με τη βοήθεια των πιο πάνω, ένα συμπέρασμα από μια ομάδα υποθέσεων κάνουμε τα ακόλουθα βήματα.

- Στις υποθέσεις επισυνάπτουμε την άρνηση του συμπεράσματος.
- Από τη διευρυμένη ομάδα των υποθέσεων αποδεικνύουμε την

άρνηση ενός τύπου που συναντάται σε κάποια βαθμίδα της απόδειξης. (Αυτό το χαρακτηρίζουμε ως «άτοπο»)

Η διαδικασία αυτή καλείται έμμεση απόδειξη ή απαγωγή σε άτοπο.

Ας δούμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της απαγωγής σε άτοπο στο ακόλουθο επιχείρημα:

«Αν η Πάρνηθα έχει υψόμετρο πάνω από 2000 μέτρα, τότε στην κορυφή της δεν υπάρχουν δένδρα. Όμως, στην κορυφή της Πάρνηθας και της Πεντέλης υπάρχουν δένδρα. Άρα η Πάρνηθα δεν έχει υψόμετρο πάνω από 2000 μέτρα».

Αυτό παραφράζεται ως εξής: «Αν η Πάρνηθα, έχει υψόμετρο πάνω από 2000 μέτρα, τότε στην κορυφή της Πάρνηθας δεν υπάρχουν δένδρα. Όμως στην κορυφή της Πάρνηθας υπάρχουν δένδρα και στην κορυφή της Πεντέλης υπάρχουν δένδρα. Άρα η Πάρνηθα δεν έχει υψόμετρο πάνω από 2000 μέτρα». Το αντίστοιχο σχήμα επιχειρήματος είναι το $Π \rightarrow \neg P$, $P \wedge T$, $\neg Π$.

Απόδειξη σχετική με το επιχείρημα	**Απόδειξη σχετική με το σχήμα επιχειρήματος**
1. Αν η Πάρνηθα έχει υψόμετρο πάνω από 2000 μέτρα, τότε στην κορυφή της Πάρνηθας δεν υπάρχουν δένδρα.	1. $Π \rightarrow \neg P$
2. Όμως στην κορυφή της Πάρνηθας υπάρχουν δένδρα και στην κορυφή της Πεντέλης υπάρχουν δένδρα.	2. $P \wedge T$
3. (Έστω ότι) η Πάρνηθα έχει υψόμετρο πάνω από 2000 μέτρα.	3. Π [Η άρνηση $\neg\neg Π$ του συμπεράσματος $\neg$ είναι λογικά ισοδύναμη προς την Π. (Νόμος διπλής άρνησης). Εισάγουμε λοιπόν ως υπόθεση το Π].
4. (Από το 1, το 3 και τον Modus Ponens συνάγεται ότι) στην κορυφή της Πάρνηθας δεν υπάρχουν δένδρα.	4. $\neg P$ (1,3 Modus Ponens)
5. (Από το 2 συνάγεται ότι) στην κορυφή της Πάρνηθας υπάρχουν δένδρα.	5. P (2)

Είναι φανερό πως αποδεχόμενοι την άρνηση (Π) του συμπεράσματος (¬Π)ως υπόθεση, καταλήξαμε σε άτοπο, αφού η πιο πάνω διαδοχή συνιστά απόδειξη μιας πρότασης (Ρ) που είναι η άρνηση μιας προηγούμενης (¬Ρ) στη διαδοχή αυτή. (Βήματα 4 και 5). Επομένως, το συμπέρασμα αποδεικνύεται από τις υποθέσεις και συνεπώς το επιχείρημα είναι έγκυρο. Για να εισάγουμε την άρνηση του συμπεράσματος που θέλουμε να αποδείξουμε ως υπόθεση του επιχειρήματος χρησιμοποιούμε συνήθως την έκφραση «έστω ότι δεν».

Whitehead

Ένα άλλος τρόπος για να αποδείξουμε το Ρείναι η χρήση του εγκύρου τύπου επιχειρήματος Π→Ρ, ¬Π→Ρ, Ρ. Επίσης, για να αποδείξουμε το Ρ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Modus Ponens.

Πώς αποδεικνύουμε μια διάζευξη

Ένας τρόπος για να αποδείξουμε μια διάζευξη Π∨Ρ είναι να αποδείξουμε τη λογικά ισοδύναμή της συνεπαγωγή ¬Π→Ρ. Ένας άλλος τρόπος για να αποδείξουμε μια διάζευξη Π∨Ρ είναι να εφαρμόσουμε την απαγωγή σε άτοπο. (Η άρνησή της είναι λογικά ισοδύναμη προς την ¬Π∧¬Ρ, Νόμος De Morgan για τη διάζευξη, 6η γραμμή πίνακα 18). Τρίτος τρόπος είναι η εφαρμογή του εγκύρου επιχειρήματος Τ∨Σ, Τ→Π, Σ→Ρ, Π∨Ρ. (Δημιουργικό δίλημμα). (Η απόδειξη της εγκυρότητάς του αφήνεται ως άσκηση).

Πώς αποδεικνύουμε μια σύζευξη

Ένας τρόπος για να αποδείξουμε μια σύζευξη Π∧Ρ από μια ομάδα υποθέσεων είναι να αποδείξουμε από αυτήν την ομάδα τα Π και Ρ. Δεύτερος τρόπος απόδειξης της Π∧Ρ είναι η απαγωγή σε άτοπο.

Πώς αποδεικνύουμε μια ισοδυναμία

Για να αποδείξουμε μια ισοδυναμία Π↔Ρ από μια ομάδα υποθέσεων αρκεί να αποδείξουμε από αυτήν τις συνεπαγωγές Π→Ρ και Ρ→Π.

Ερωτήσεις

1. Τι καλούμε απαγωγή σε άτοπο;

Ασκήσεις

1. Να αποδείξουμε ότι το επιχείρημα i της άσκησης 1 της ενότητας 14 είναι έγκυρο.

κεφάλαιο 3

ΙΙΙ. Κατηγορηματική Λογική

1. Εισαγωγή

Η συμβολική γλώσσα που χρησιμοποιούμε στην προτασιακή λογική συγκροτείται με τέτοιον τρόπο, ώστε δεν έχει τη δυνατότητα να εκφράσει τη δομή υποκείμενο-κατηγόρημα, καθώς και τη δομή προτάσεων που αναφέρονται σε σχέσεις μεταξύ ατομικοτήτων. Η γλώσσα αυτή δεν είναι αρκετά ευέλικτη για να εκφράσει ατομικότητες είτε με συγκεκριμένο είτε με γενικό τρόπο. Για παράδειγμα, στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε σύμβολα για συγκεκριμένες ατομικότητες όπως 0 ή 1 καθώς και μεταβλητές (για παράδειγμα χ,ψ κτλ.) που αντιπροσωπεύουν ατομικότητες κατά γενικό τρόπο. Στο πλαίσιο της συμβολικής γλώσσας της προτασιακής λογικής δεν υπάρχει η δυνατότητα να εκφραστούν αυτά τα πράγματα. Επίσης, η γλώσσα αυτή δεν είναι σε θέση να περιγράψει τη δομή προτάσεων που περιέχουν εκφράσεις όπως "κάθε τι" η "μερικά" και άλλες παρόμοιες. Για το λόγο αυτό είναι ανάγκη να προσφύγουμε σε άλλες μεθόδους έκφρασης και μελέτης των προτάσεων, οι οποίες αναδεικνύουν τα στοιχεία που τις συγκροτούν και τον τρόπο με τον οποίο αυτά συνδέονται.

Είναι χαρακτηριστικό ότι στα πλαίσια της προτασιακής λογικής δεν μπορούμε να εκφράσουμε προτάσεις όπως «κάθε άνθρωπος είναι θνητός» ή «υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος του πέντε». Αυτές οι αδυναμίες θεραπεύονται με την εισαγωγή της κατηγορηματικής λογικής όπως βλέπουμε αμέσως παρακάτω.

2. Η Δομή Υποκείμενο - Κατηγόρημα

Ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας.

(1) «Ο Γιώργος είναι ψηλός»,

(2) «Ο Όλυμπος είναι ψηλός»,

(3) «Αυτός είναι ψηλός»,

(4) «Αυτός που νίκησε στον αγώνα είναι ψηλός»

Αυτές έχουν διττή γλωσσική λειτουργία. Από τη μια πλευρά, με τις προτάσεις αυτές **αναφερόμαστε** σε κάποια ατομικότητα, η οποία μπορεί να είναι πρόσωπο, αντικείμενο κάτι αφηρημένο (ιδέα, έννοια, αποκύημα φαντασίας κτλ.) Η αναφορά αυτή γίνεται διαμέσου ποικίλων γλωσσικών μονάδων, όπως είναι τα κύρια ονόματα (Γιώργος, Όλυμπος), οι προσωπικές αντωνυμίες (αυτός) διάφοροι περιγραφικοί προσδιορισμοί που μπορεί να είναι και ολόκληρες προτάσεις (αυτός που νίκησε στον αγώνα) κτλ. Όλα αυτά θα τα καλούμε **ονόματα.** Το όνομα που αναφέρεται στην ατομικότητα καλείται υποκείμενο της πρότασης.

Από την άλλη πλευρά, με αυτές τις προτάσεις **κατηγορούμε**, δηλαδή αποδίδουμε μια ιδιότητα στην ατομικότητα στην οποία αναφερόμαστε. Το μέρος της πρότασης δια του οποίου γίνεται η κατηγόρηση καλείται **κατηγόρημα.** Παρατηρούμε ότι στις πιο πάνω προτάσεις το κατηγόρημα είναι το κοινό τους μέρος, δηλαδή η έκφραση «είναι ψηλό».

Οι προτάσεις αυτές λοιπόν έχουν δύο μέρη, το υποκείμενο και το κατηγόρημα:

ο Γιώργος	είναι ψηλός
υποκείμενο	κατηγόρημα

Από άποψη σύνταξης το κατηγόρημα εμφανίζεται με τη μορφή μιας διαδοχής ενός κενού και λέξεων έτσι ώστε, αν στη θέση του κενού τοποθετηθεί το όνομα μιας ατομικότητας, δημιουργείται μια πρόταση της φυσικής γλώσσας. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το κατηγόρημα "είναι ποιητής", το οποίο συντακτικά εμφανίζεται ως διαδοχή «...είναι ποιητής». Αν στη θέση του κενού τοποθετήσουμε τα ονόματα Όμηρος, Καβάφης, Πλάτων, παίρνουμε τις προτάσεις: «ο Όμηρος είναι ποιητής», «ο Καβάφης, είναι ποιητής», «ο Πλάτων είναι ποιητής».

Για λόγους ευκολίας επιλέγουμε τα αρχικά κεφαλαία γράμματα της

αλφαβήτου για να δηλώνουμε συγκεκριμένα κατηγορήματα. Τα γράμματα αυτά (συχνά τα χρησιμοποιούμε και με δείκτες) τα ονομάζουμε **κατηγορηματικές μεταβλητές** και καταχρηστικά μερικές φορές τα ονομάζουμε και αυτά **κατηγορήματα.** Τα αρχικά μικρά γράμματα της αλφαβήτου τα χρησιμοποιούμε για να δηλώνουμε συγκεκριμένα ονόματα και τα ονομάζουμε **ατομικές σταθερές** ή απλά **σταθερές.** Συχνά τα χρησιμοποιούμε με δείκτες . Έτσι, αν επιλέξω το Α για να δηλώνει το «...είναι ψηλός,» και το γ για να δηλώνει το «ο Γιώργος», τότε η πρόταση

$$\underset{\gamma}{\underline{\text{Ο Γιώργος}}}\ \ \underset{A}{\underline{\text{είναι ψηλός}}}$$

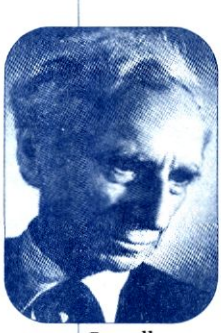
δηλώνεται με τη διαδοχή Α(γ). Η διαδοχή αυτή δεν είναι πρόταση, αλλά το σύμβολο της πιο πάνω συγκεκριμένης πρότασης. Η πρόταση αυτή είναι έκφραση της φυσικής γλώσσας, ενώ το Α(γ) είναι έκφραση της συμβολικής γλώσσας που χρησιμοποιούμε στη λογική. Αν για σύμβολο του "ο Όλυμπος" επιλέξουμε το β και για το «αυτός που νίκησε στον αγώνα» το α, τότε οι προτάσεις «ο Όλυμπος είναι ψηλός» και "αυτός που νίκησε στον αγώνα είναι ψηλός" δηλώνονται με τις εκφράσεις Α(β) και Α(α) αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι έτσι χρησιμοποιούμε για τις απλές προτάσεις συμβολικές εκφράσεις οι οποίες περιέχουν ανεξάρτητα σύμβολα για κάθε ένα από τα δύο μέρη των προτάσεων, δηλαδή το υποκείμενο και το κατηγόρημα. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε έ-

Ιστορία 4η — *Η Μαντεψιά*

Κατά τη διάρκεια ενός παιχνιδιού με χαρτιά τραβιούνται τρεις άσσοι, χωρίς να αποκαλυφθούν, και ζητείται από τον Κώστα, το Νίκο και τη Γεωργία να μαντέψουν τι είδους είναι ο κάθε άσσος. Οι απαντήσεις τους ήταν οι εξής:

	1ο χαρτί	2ο χαρτί	3ο χαρτί
Κώστας	κούπα	σπαθί	μπαστούνι
Νίκος	κούπα	καρό	μπαστούνι
Γεωργία	καρό	σπαθί	κούπα

Με δεδομένα ότι:
(α) τουλάχιστον ένας μάντεψε σωστά τον κάθε άσσο,
(β) καθένας μάντεψε σωστά τουλάχιστον δυο φύλλα και
(γ) κανένα ζεύγος προσώπων δε μάντεψε σωστά ακριβώς τον ίδιο αριθμό χαρτιών,
να βρείτε τι είδους ακριβώς ήταν κάθε χαρτί.


Russell

να ευέλικτο μέσον συμβολικής έκφρασης των απλών προτάσεων με το οποίο αναδεικνύεται η συγκρότησή τους. Αντιθέτως στην προτασιακή λογική χρησιμοποιούμε τις προτασιακές μεταβλητές οι οποίες δεν αναδεικνύουν τη δομή των απλών προτάσεων. (Εδώ πρέπει να πούμε ότι παρ' ότι στη φυσική γλώσσα το υποκείμενο προηγείται του κατηγορήματος, στη λογική έχει επικρατήσει να γράφουμε πρώτα το κατηγορηματικό σύμβολο και μετά την ατομική σταθερά).

Οι πιο πάνω προτάσεις (1), (2), (3) και (4) έχουν κοινό μέρος το κατηγόρημα και την ίδια δομή την ίδια σύνταξη. Αυτό το οποίο είναι διαφορετικό σε κάθε μια από αυτές είναι το όνομα που έχει τη θέση του υποκειμένου.

Στη συμβολική γλώσσα από τη μια πλευρά χρησιμοποιούμε κάποιο κεφαλαίο γράμμα (εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει το Α) για να δηλώνει το κατηγόρημα και από την άλλη χρησιμοποιούμε ένα από τα τελευταία μικρά γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου-συνήθως τα χ,ψ,ω – συχνά με δείκτες στη θέση του υποκειμένου. Αυτά τα γράμματα τα ονομάζουμε **ατομικές μεταβλητές** ή απλά **μεταβλητές.** Έτσι η διαδοχή.

...	είναι ψηλός
χ	Α

αποδίδεται στη συμβολική γλώσσα με την έκφραση Α(χ), την οποία διαβάζουμε: «Α του χ». Η έκφραση αυτή καλείται **τύπος.**

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε τις διαφορές μεταξύ του Α(χ) και της έκφρασης που προκύπτει αν στη θέση του χ τοποθετήσουμε μια ατομική σταθερά, ας πούμε το γ. Όπως έχουμε ήδη πει, το Α(γ) είναι το σύμβολο της συγκεκριμένης πρότασης «ο Γιώργος είναι ψηλός». Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο για το Α(χ). Για να προκύψει σύμβολο μιας συγκεκριμένης πρότασης πρέπει να αντικαταστήσουμε το χ με το σύμβολο ενός συγκεκριμένου ονόματος. Για παράδειγμα αν στη θέση του χ τοποθετήσουμε το β παίρνουμε το Α(β), το οποίο είναι το σύμβολο της πρότασης: «ο Όλυμπος είναι ψηλός». Ή μπορούμε να πούμε, κατ' ευθείαν ότι, καθώς το Α είναι σύμβολο του κατηγορήματος *είναι ψηλός*, τότε αν στη θέση του χ τοποθετήσουμε το όνομα *ο πύργος του Eiffel*, θα πάρουμε την πρόταση «ο πύργος του Eiffel είναι ψηλός». Επομένως, το Α(χ) παράγει ατέλειωτο πλήθος προτάσεων. Μπορούμε να πούμε ότι αποτελεί το σύμβολο της κοινής συντακτικής δομής όλων των προτάσεων, που παράγονται από το συγκεκριμένο κατηγόρημα Α: *είναι ψηλός.*

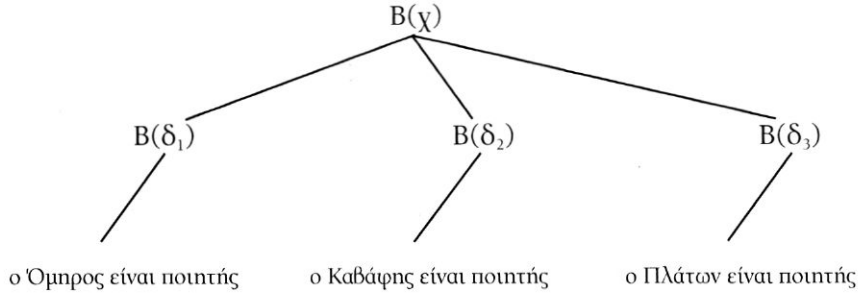
Εδώ πρέπει να πούμε ότι δεν έχει σημασία το ποια ατομική μεταβλητή χρησιμοποιούμε με το κατηγορηματικό σύμβολο. Τα Α(χ), Α(ψ), Α(ω) αδιαφόρως παράγουν τις ίδιες ακριβώς προτάσεις, συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι αποτελούν διαφορετικές μορφές του ίδιου τύπου.

Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα: Αν επιλέξουμε την κατηγορηματική σταθερά Β για να δηλώσουμε το κατηγόρημα «είναι ποιητής» και τις ατομικές σταθερές δ_1, δ_2 και δ_3 για να δηλώσουμε τα ονόματα "Όμηρος", "Καβάφης" και "Πλάτων" αντιστοίχως, τότε η έκφραση Β(χ) αποτελεί το σύμβολο της δομής όλων των προτάσεων που είναι όμοιες με τις προτάσεις «ο Όμηρος είναι ποιητής», «ο Καβάφης είναι ποιητής», «ο Πλάτων είναι ποιητής».

Παρατηρούμε τα εξής:

• Αν στη θέση του χ τοποθετήσουμε το όνομα *ο Καβάφης* και στη θέση του Β το *είναι ποιητής*, παίρνουμε την πρόταση «ο Καβάφης είναι ποιητής».

• Αν στη θέση του χ τοποθετήσουμε το δ_2, παίρνουμε την έκφραση Β(δ_2), η οποία είναι το σύμβολο της προηγούμενης πρότασης.



Ερώτηση

1. Τι ονομάζουμε υποκείμενο και τι κατηγόρημα σε μια πρόταση της φυσικής γλώσσας;

Ασκήσεις

1. Να εκφρασθούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

i. Ο Γιώργος είναι μαθητής του λυκείου
ii. Η Μαρία είναι μαθήτρια του λυκείου
iii. Ο Γιώργος γράφει ποιήματα
iv. Η Μαρία είναι ψηλή.

3. Πολυμελή Κατηγορήματα

Σε αντίθεση με τις προτάσεις που μελετήσαμε στα προηγούμενα και οι οποίες περιέχουν ένα όνομα στη θέση του υποκειμένου, υπάρχουν άλλες, οι οποίες περιέχουν δύο ή περισσότερα ονόματα. Τέτοια πρόταση, για παράδειγμα, είναι η ακόλουθη:

(1) «ο Γιώργος και ο Κώστας είναι υπάλληλοι».

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτή είναι σύντομη μορφή της συζευκτικής πρότασης «ο Γιώργος είναι υπάλληλος και ο Κώστας είναι υπάλληλος». Είναι δηλαδή ταυτόσημη με τη σύζευξη δύο προτάσεων με το ίδιο κατηγόρημα. Όμως υπάρχουν και προτάσεις της φυσικής *γλώσσας* όπως η:

(2) «Ο Γιώργος και ο Κώστας είναι συνάδελφοι»

τις οποίες δεν μπορούμε να αναλύσουμε όπως την προηγούμενη. Αν η πρόταση (2) θεωρηθεί ως σύζευξη με τον ίδιο τρόπο που θεωρήθηκε η (1), τότε παίρνει τη μορφή: «ο Γιώργος είναι συνάδελφος και ο Κώστας είναι συνάδελφος». Αυτή όμως δεν έχει κανένα νόημα. Αντίθετα, μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως συζευκτική πρόταση με τη μορφή «ο Γιώργος είναι συνάδελφος του Κώστα και ο Κώστας είναι συνάδελφος του Γιώργου». (Αυτή βεβαίως έχει την ίδια σημασία με μια οποιαδήποτε από τις δύο συνιστώσες της, για παράδειγμα, με την «ο Γιώργος είναι συνάδελφος του Κώστα»).

Είναι φανερό πως η διαφορά μεταξύ των δύο προτάσεων (1) και (2) οφείλεται στο γεγονός πως με την έκφραση «είναι συνάδελφος» δεν αποδίδουμε μια ιδιότητα σε ένα πρόσωπο, όπως γίνεται με την έκφραση «είναι υπάλληλος», αλλά βεβαιώνουμε ότι δύο πρόσωπα έχουν μια σχέση μεταξύ τους. Δεν έχει νόημα να λέμε ότι «ο Κώστας είναι συνάδελφος» αλλά ότι «ο Κώστας είναι συνάδελφος του Γιώργου».

Μια έκφραση όπως η «είναι συνάδελφος» καλείται **σχέση**. Από άποψη σύνταξης εμφανίζεται με τη μορφή μιας διαδοχής λέξεων και δύο κενών. Αν τα κενά συμπληρωθούν με τα ονόματα δύο ατομικοτήτων, δημιουργείται μια πρόταση. Για παράδειγμα, η σχέση «είναι μαθητής του» συ-

ντακτικά εμφανίζεται ως η διαδοχή: «...είναι μαθητής τού...». Αν τα κενά της συμπληρωθούν, για παράδειγμα, με τα ονόματα «Πλάτων» και «Σωκράτης» παίρνουμε την πρόταση: «ο Πλάτων είναι μαθητής τού Σωκράτη». Εδώ πρέπει να προσέξουμε ότι αν στο πρώτο κενό τοποθετήσουμε το όνομα "Σωκράτης" και στο δεύτερο κενό το όνομα "Πλάτων", τότε παίρνουμε την πρόταση: «Σωκράτης είναι μαθητής του Πλάτων». Αυτή βεβαίως έχει εντελώς διαφορετική σημασία από εκείνη της προηγούμενης πρότασης. Συχνά λοιπόν είναι καθοριστική η διάταξη των ονομάτων με τα οποία συμπληρώνουμε μια σχέση. Βεβαίως υπάρχουν και περιπτώσεις όπως η σχέση «είναι συνάδελφος», όπου η διάταξη των ονομάτων δεν έχει σημασία. Μια σχέση η οποία συντάσσεται με δύο κενά, δηλαδή συνδέει δυο ονόματα, καλείται **δυαδική (ή διμελής) σχέση.**

Εκτός από τις δυαδικές σχέσεις υπάρχουν και σχέσεις, οι οποίες συνδέουν περισσότερα από δύο ονόματα. Έτσι, έχουμε τριαδικές (ή τριμελείς) σχέσεις κοκ. Για παράδειγμα, η σχέση «είναι γονείς του (της)» είναι τριμελής, αφού εμφανίζεται συντακτικά ως η διαδοχή «...και ...είναι γονείς τού (της)...», η οποία περιλαμβάνει τρία κενά. Αν στη θέση τους τοποθετηθούν τα ονόματα "Κώστας", "Ελένη» και "Μαρία" παίρνουμε την πρόταση "ο Κώστας και η Ελένη είναι γονείς της Μαρίας". Ομοίως, η σχέση «βρίσκεται μεταξύ» είναι τριμελής καθώς εμφανίζεται συντακτικά ως η διαδοχή:

«...βρίσκεται μεταξύ...και...», η οποία έχει τρία κενά. Αν τα συμπληρώσουμε με τα τρία ονόματα "Αίγιο". "Κόρινθος", και "Πάτρα" παίρνουμε την πρόταση:

(3) «το Αίγιο βρίσκεται μεταξύ της Κορίνθου και της Πάτρας».

Αν θελήσουμε να εκφράσουμε συμβολικά την (3), επιλέγουμε ένα κεφάλαιο γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου, για παράδειγμα το Μ, για να δηλώσουμε τη σχέση «βρίσκεται μεταξύ» και τις ατομικές σταθερές α,β και γ για να δηλώσουμε τα "Αίγιο", "Κόρινθος" και "Πάτρα" αντιστοίχως. Τότε η πρόταση (3) συμβολίζεται με την έκφραση Μ (α,β,γ). Η δομή αυτής της πρότασης, αλλά και κάθε άλλης που παράγεται από τη σχέση αυτή, συμβολίζεται με τη χρήση του Μ και τρεις ατομικές μεταβλητές, για παράδειγμα, χ,ψ,ω, που θα σημειώνουν τα τρία κενά (τις θέσεις των ονομάτων): Μ(χ,ψ,ω).

Το Μ το λέμε **τριμελές κατηγορηματικό σύμβολο**. Γενικότερα, κάθε γράμμα που χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε σχέση το ονομάζουμε και αυτό **κατηγορηματικό σύμβολο** όπως κάνουμε για τα γράμματα που χρησιμοποιούμε για τα κατηγορήματα. Έτσι, έχουμε διμελή, τετραμελή

κτλ. κατηγορηματικά σύμβολα. Συνηθίζουμε να ονομάζουμε (πολυμελή) κατηγορήματα και τις σχέσεις. Για παράδειγμα, η προηγούμενη σχέση «βρίσκεται μεταξύ» θεωρείται τριμελές κατηγόρημα. Αυτό το κάνουμε για λόγους ενοποίησης της ορολογίας αλλά και γιατί μπορούμε να θεωρήσουμε ότι με τις σχέσεις αποδίδουμε ιδιότητες σε διατεταγμένα πλήθη ατομικοτήτων, όπως με το κατηγόρημα αποδίδουμε κάποια ιδιότητα σε μια ατομικότητα. Για αυτό το λόγο, ένα κατηγόρημα όπως το «είναι υπάλληλος» θεωρείται μονομελές. (Για λόγους ευκολίας τα κατηγορηματικά σύμβολα τα ονομάζουμε καταχρηστικώς και κατηγορήματα).

Αν και στη φυσική γλώσσα οι λέξεις που εκφράζουν μια σχέση βρίσκονται μεταξύ των ονομάτων που συνδέονται με αυτή, στη συμβολική γλώσσα έχει επικρατήσει ο τρόπος γραφής κατά τον οποίο οι μεταβλητές ακολουθούν το κατηγορηματικό σύμβολο.

Αν είναι Α ένα κατηγορηματικό σύμβολο και $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_v$ μια ν-άδα ατομικών μεταβλητών, η έκφραση Α $(\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_v)$ ονομάζεται και αυτή **τύπος**.

Ερώτηση

1. Τι ονομάζουμε δυαδική σχέση;

Ασκήσεις

1. Να εκφρασθούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

i. Ο Γιώργος είναι σύζυγος της Μαρίας.
ii. Ο Γιώργος είναι ψηλότερος του Δημήτρη.
iii. Η Μαρία είναι παιδί του Κώστα και της Αγγελικής.
iv. Ο Γιώργος είναι παιδί του Νίκου και της Ουρανίας.

4. Ποσοδείκτες

Συχνά χρησιμοποιούμε προτάσεις όπως οι ακόλουθες: «σε αυτό το δωμάτιο υπάρχει κάτι ευωδιαστό», «στον κήπο υπάρχει κάτι ευωδια-

στό», «στη σύσταση αυτού του μίγματος υπάρχει κάτι ευωδιαστό» Παρατηρούμε ότι όλες έχουν κοινό μέρος, δηλαδή την έκφραση

(1) «υπάρχει κάτι ευωδιαστό».

Αυτή έχει την ίδια σημασία με την έκφραση

(2) «Υπάρχει τουλάχιστον ένα πράγμα, το οποίο είναι ευωδιαστό».

Εδώ πρέπει να πούμε ότι η λέξη «πράγμα» (όπως και η λέξη «κάτι») χρησιμοποιείται για να δηλώσει το οποιοδήποτε στοιχείο του περιβάλλοντος μπορεί να απασχολήσει το νου μας. Έχει λοιπόν την ίδια εμβέλεια με τη λέξη «ατομικότητα» αλλά χρησιμοποιείται περισσότερο στην περίπτωση όπου αναφερόμαστε εντελώς αόριστα σε κάτι. Μπορούμε να πούμε ότι είναι το πλησιέστερο στοιχείο της φυσικής γλώσσας, που είναι δυνατό να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε επίπεδο συμβολικής γλώσσας, στην ατομική μεταβλητή. Και αυτό διότι το «πράγμα» είναι δυνατό να αναφέρεται σε οτιδήποτε.

Ας μελετήσουμε τώρα τον τρόπο με τον οποίο συγκροτείται η (2). Παρατηρούμε ότι σε αυτήν υπάρχει το κατηγόρημα «είναι ευωδιαστό», το οποίο αντιστοιχίζουμε στο κατηγορηματικό σύμβολο Α. Είναι φανερό πως η έκφραση «το οποίο», που προηγείται του κατηγορήματος, επέχει θέση υποκειμενου σε σχέση με το κατηγόρημα αυτό. Παρατηρούμε επίσης ότι η έκφραση «το οποίο» αναφέρεται σε ό,τι ακριβώς αναφέρεται και η λέξη «πράγμα».

Όπως είπαμε πιο πάνω μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτή η λέξη, και συνεπώς και η έκφραση «το οποίο», αντιστοιχεί, σε επίπεδο συμβολικής γλώσσας, σε ατομικη μεταβλητή, ας πούμε στη χ. Συνεπώς αν θελήσουμε να δηλώσουμε συμβολικά το τμήμα «το οποίο είναι ευωδιαστό» της (2), ο καταλληλότερος τρόπος είναι να το κάνουμε με τον τύπο Α(χ). Για να δηλώνουμε την έκφραση «υπάρχει τουλάχιστον ένα» έχει επιλεγεί το σύμβολο ∃ (κατοπτρικό κεφάλαιο Ε), το οποίο καλείται **υπαρκτικός ποσοδείκτης**. Επειδή η λέξη «πράγμα» όπως και η έκφραση «το οποίο», αντιστοιχεί στη χ, είναι φανερό ότι στη θέση της στην (2) θα έχουμε μια δεύτερη εμφάνιση της ίδιας μεταβλητής χ. Συνεπώς το τμήμα «υπάρχει τουλάχιστον ένα πράγμα» της (2), αντιστοιχεί συμβολικά στην έκφραση ∃χ. Έτσι, ολόκληρη η (2) δηλώνεται συμβολικά ∃χΑ(χ).

υπάρχει τουλάχιστον ένα	πράγμα	το οποίο	είναι ευωδιαστό
∃	χ	χ	Α
υπάρχει τουλάχιστον ένα	...	...	είναι ευωδιαστό
∃	χ	χ	Α
	∃χΑ(χ)		

Υπάρχουν πολλές εκφράσεις της φυσικής γλώσσας, οι οποίες έχουν την ίδια σημασία με την έκφραση «υπάρχει τουλάχιστον ένα πράγμα» και συνεπώς μπορούμε να τις συμβολίζουμε με ∃χ. Μερικές από αυτές είναι οι: «τουλάχιστον ένα πράγμα είναι τέτοιο ώστε», «υπάρχουν κάποια πράγματα τέτοια ώστε», υπάρχει κάποιο πράγμα τέτοιο ώστε», «κάτι είναι τέτοιο ώστε», «για τουλάχιστον ένα πράγμα ισχύει ότι», «για κάποιο πράγμα», «μερικοί (-ές,-ά)».

Εκτός από τον υπαρκτικό υπάρχει και άλλος ποσοδείκτης, ο οποίος χρησιμοποιείται ευρύτατα. Ας πάρουμε την έκφραση:

(3) «κάθε πράγμα είναι φθαρτό».

Αυτή παράγεται από την πρόταξη της έκφρασης «κάθε πράγμα» στο κατηγόρημα «είναι φθαρτό». Για την έκφραση "κάθε" επιλέγουμε το σύμβολο ∀ (ανεστραμμένο κεφαλαίο Α), το οποίο καλείται **καθολικός ποσοδείκτης.** Όπως έχουμε πει στα προηγούμενα, για τη λέξη "πράγμα" μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το χ, οπότε, αν για το κατηγόρημα "είναι φθαρτό" χρησιμοποιήσουμε το κατηγορηματικό σύμβολο Β, η (3) συμβολίζεται με ∀χΒ(χ). Υπάρχουν αρκετές εκφράσεις της φυσικής γλώσσας που έχουν την ίδια σημασία με την έκφραση «κάθε πράγμα» και συνεπώς συμβολίζονται και αυτές με ∀χ. Μερικές τέτοιες εκφράσεις είναι οι: «όλοι (-ες, -α)», «κάθε τι», «για κάθε πράγμα είναι αλήθεια ότι».

Επειδή δεν έχει σημασία το ποια ατομική μεταβλητή χρησιμοποιούμε σε ένα τύπο, οι συμβολικές εκφράσεις ∃χΑ(χ), ∃ψΑ(ψ), ∃ωΑ(ω) κτλ. είναι ισοδύναμες.

Είναι φανερό πως δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ατομική μεταβλητή χ στο τμήμα Α(χ) της συμβολικής έκφρασης ∃χΑ(χ) ή ∀χΑ(χ) με ένα όνομα διότι η έκφραση της φυσικής γλώσσας που προκύπτει δεν έχει κανένα νόημα. Συνεπώς αυτή η εμφάνιση του χ δεσμεύεται από τον ποσοδείκτη σε τρόπο ώστε η θέση που κατέχει στο Α(χ) δεν είναι ελεύθερη να δεχθεί κάποιο όνομα. Αντιθέτως, όταν ουδείς ποσοδείκτης προτάσσεται του τύπου Α(χ) μπορούμε στη θέση του χ να τοποθετήσουμε οποιοδήποτε όνομα. Για το λόγο αυτό, στις εκφράσεις της μορφής ∃χΑ(χ) ή ∀χΑ(χ), λέμε ότι η εμφάνιση της ατομικής μεταβλητής χ στο Α(χ)είναι **δεσμευμένη**, σε αντίθεση με την εμφάνισή της στο Α(χ), όταν αυτό θεωρείται μόνο του, όπου καλείται **ελεύθερη.** Στις εκφράσεις αυτές το Α(χ) καλείται **εμβέλεια** ή **ακτίνα** του ποσοδείκτη, αφού αποτελεί το χώρο (ή καλύτερο καταλαμβάνει το χώρο) στον οποίο εκτείνεται η δράση του. Συνεπώς η εμφάνιση μιας ατομικής μεταβλητής χ είναι δεσμευμένη εφόσον βρίσκεται μέσα

στην εμβέλεια ενός από τους δύο ποσοδείκτες ∃ και ∀.

Ας θεωρήσουμε τις ταυτόσημες προτάσεις

(4) «σε αυτό το δωμάτιο υπάρχει κάτι ευωδιαστό» και

(5) «σε αυτό το δωμάτιο υπάρχει τουλάχιστον ένα πράγμα, το οποίο είναι ευωδιαστό» και την πρόταση

(6) «κάθε πράγμα το οποίο βρίσκεται σε αυτό το αρωματοπωλείο είναι ευωδιαστό».

Tarski

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των πιο πάνω προτάσεων, όπως και των εκφράσεων (1), (2) και (3), είναι ότι έχουν συμβολική παράσταση, η οποία περιέχει έναν τουλάχιστον από τους δύο ποσοδείκτες. Τέτοιου είδους προτάσεις συνήθως περιέχουν τις λέξεις «πράγμα» ή «κάτι». Όπως είπαμε στα προηγούμενα και οι δύο αυτές λέξεις χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν το οποιαδήποτε στοιχείο του περιβάλλοντός μας, δηλαδή είναι δυνατόν να αναφέρονται σε οτιδήποτε.

Είναι φανερό ότι στις (4) και (5) το σύνολο των πραγμάτων στα οποία αναφέρεται η λέξη «πράγμα» ή η λέξη «κάτι» είναι όλα εκείνα που βρίσκονται στο συγκεκριμένο δωμάτιο για το οποίο μιλάμε. Αναλόγως στην (6) το σύνολο, σε στοιχεία του οποίου αναφέρεται η λέξη "πράγμα" είναι όλα όσα υπάρχουν στο συγκεκριμένο αρωματοπωλείο. Ονομάζουμε **σύνολο αναφοράς** την ολότητα των πραγμάτων στα οποία μπορεί να αναφέρονται αυτές οι λέξεις «πράγμα» ή «κάτι».

Στις εκφράσεις (1), (2) και (3) το σύνολο αναφοράς δεν είναι καθορισμένο και από αυτήν την άποψη έχουν και οι τρεις ένα χαρακτήρα γενικόλογης ασάφειας. Σε περιπτώσεις εκφράσεων όπως αυτές, όπου δεν είναι καθορισμένο το σύνολο αναφοράς, μπορεί να συμβεί ένα από τα ακόλουθα δύο πράγματα.

• Είτε αίρουμε την ασάφειά τους προβαίνοντας σε μια ερμηνεία τους που προσδιορίζει το σύνολο αναφοράς. Για παράδειγμα, μπορούμε να δηλώσουμε ότι όταν λέμε πως «υπάρχει τουλάχιστον ένα πράγμα, το οποίο ευωδιαστό» εννοούμε πως «υπάρχει τουλάχιστον ένα πράγμα στη σύσταση αυτού του μίγματος, το οποίο είναι ευωδιαστό». Ερμηνεύοντας με αυτόν τον τρόπο την έκφραση (2) προσδιορίζουμε το σύνολο αναφοράς, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση είναι τα συστατικά του εν λόγω μίγματος.

• Είτε δεν προβαίνουμε σε καμιά ερμηνεία τέτοιου είδους εκφράσεων οπότε θεωρούμε ότι το σύνολο αναφοράς είναι **το ευρύτερο που μπορεί να υπάρξει**, δηλαδή η ολότητα των πραγμάτων του κόσμου μας.

Ερωτήσεις

1. Τι είναι ο υπαρκτικός και τι ο καθολικός ποσοδείκτης;
2. Πότε η εμφάνιση μιας μεταβλητής καλείται δεσμευμένη;

Ασκήσεις

1. Να εκφρασθούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας.

i. Όλα έχουν βάρους.
ii. Κάτι έχει βάρος.
iii. Οτιδήποτε έχει βάρος.
iv. Υπάρχει κάτι που έχει βάρος.

5. Ποσόδειξη σε οποιουσδήποτε Τύπους

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, οι τύποι της μορφής $A(\chi)$ ή $A(\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_v)$ παράγουν απλές προτάσεις. Στην κατηγορηματική λογική έχουν ένα ρόλο ανάλογο με εκείνο που έχουν οι προτασιακές μεταβλητές στην προτασιακή λογική. Μπορούν να συνδέονται μεταξύ τους με συνδέσμους ώστε να δημιουργούνται συνθετότεροι τύποι, οι οποίοι παράγουν σύνθετες προτάσεις. Συνεπώς αυτοί προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε τις προτασιακές μεταβλητές ενός προτασιακού τύπου με τύπους της μορφής $A(\chi)$ ή $A(\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_v)$.

Για παράδειγμα, οι εκφράσεις $A(\chi) \wedge B(\chi)$, $A(\chi) \vee B(\chi)$, $\neg A(\chi)$, $A(\chi) \leftrightarrow B(\chi)$, $\Gamma(\chi,\psi) \rightarrow \Delta(\chi,\psi)$, $\Gamma(\chi,\psi) \vee Z(\omega)$ και $A(\chi) \rightarrow \neg\Theta(\chi,\psi) \vee K(\psi,\omega)$, αποτελούν τύπους, οι οποίοι προκύπτουν από τους προτασιακούς τύπους $\Pi \wedge P$, $\Pi \vee P$, $\neg\Pi$, $\Pi \leftrightarrow P$, $\Pi \rightarrow P$, $\Pi \vee P$ και $(\Pi \rightarrow \neg P) \vee T$ αντιστοίχως.

Τα προηγούμενα έχουν μια πολύ σημαντική συνέπεια. Κάθε τι που έχουμε πει για τους προτασιακούς τύπους και τις τιμές αληθείας που αντιστοιχούν σε αυτούς, καθώς και για τα επιχειρήματα και την εγκυρότητά

τους, ισχύουν και για τους τύπους της κατηγορηματικής λογικής στους οποίους αναφερθήκαμε πιο πάνω. Για παράδειγμα, ο τύπος $A(\chi)\rightarrow A(\chi)$ είναι ταυτολογία, οι τύποι $A(\chi)\vee B(\chi)$ και $A(\chi)\rightarrow B(\chi)$ είναι λογικώς ισοδύναμοι, το επιχείρημα $A(\chi)\rightarrow B(\chi)$, $A(\chi)$, $B(\chi)$ είναι έγκυρο.

Ας δούμε τώρα τη διαδικασία με την οποία μπορούμε να εκφράσουμε συμβολικά μια πρόταση χρησιμοποιώντας ποσοδείκτες και τύπους. Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη πρόταση.

(1) «Όλοι οι θάμνοι είναι φυτά».

Αυτή μας λέει ότι κάθε οργανισμός που είναι θάμνος, είναι αναγκαστικά και φυτό. Η παρουσία της λέξης «όλοι» στην πρόταση αυτή δείχνει ότι η συμβολική παράστασή της περιέχει καθολικό ποσοδείκτη. Ας δούμε ποια είναι η μορφή της. Παρατηρούμε ότι η (1) είναι ταυτόσημη με την παράφραση

(2) «κάθε τι αν είναι θάμνος, τότε αυτό είναι φυτό»

Αν και η (2) δεν είναι καλά διατυπωμένη στο πλαίσιο της φυσικής γλώσσας, είναι χρήσιμη διότι με αυτή τη μορφή καθίσταται φανερό πως περιέχει την υποθετική πρόταση.

(3) «αν είναι θάμνος, τότε αυτό θα είναι φυτό», η οποία καλλίτερα διατυπωμένη είναι η

(3′) «αν αυτό είναι θάμνος, τότε αυτό είναι φυτό».

Ο ηγούμενος όρος της είναι η πρόταση

(4) «αυτό είναι θάμνος»

και ο επόμενος όρος της είναι η

(5): «αυτό είναι φυτό».

Αυτές οι προτάσεις είναι απλές, της μορφής υποκείμενο-κατηγόρημα. Και οι δύο εμφανίσεις της λέξης «αυτό» αναφέρονται στη λέξη "τι" της έκφρασης «κάθε τι». Συνεπώς, στη συμβολική παράσταση της (1) αυτές οι τρεις αντιστοιχούν στην ίδια ατομική μεταβλητή, για παράδειγμα, στη χ. Αν επιλέξουμε τα A και B ως κατηγορηματικά σύμβολα που δηλώνουν τα κατηγορήματα "είναι θάμνος" και "είναι φυτό" αντιστοίχως, τότε οι (4) και (5) παράγονται από τους $A(\chi)$ και $B(\chi)$ αντιστοίχως. Συνεπώς, η (3) παράγεται από την $A(\chi)\rightarrow B(\chi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{κάθε τι}}{\forall\chi} \quad \text{αν} \quad \dfrac{\text{αυτό είναι θάμνος}}{A(\chi)} \quad \text{τότε} \quad \dfrac{\text{αυτό είναι φυτό}}{B(\chi)}}{\forall\chi \qquad A(\chi)\rightarrow B(\chi)}}{\forall\chi(A(\chi)\rightarrow B(\chi))}$$

Η έκφραση "κάθε τι" αναφέρεται σε ολόκληρη την πρόταση (3′). Συνεπώς, στη συμβολική παράσταση της (1) η δράση του καθολικού

ποσοδείκτη εκτείνεται σε ολόκληρη την $A(\chi)\rightarrow B(\chi)$. Για να δηλώσουμε αυτό το γεγονός, την περιβάλλουμε με ζεύγος παρενθέσεων και τοποθετούμε μπροστά από αυτές το $\forall\chi$. Με αυτόν τον τρόπο, δηλώνουμε ότι η $A(\chi)\rightarrow B(\chi)$ θεωρείται ως ενιαίος τύπος στον οποίο δρα ο ποσοδείκτης. Έτσι, η (3′) και επομένως και η (1), συμβολίζονται με την έκφραση $\forall\chi(A(\chi)\rightarrow B(\chi))$. Ο τύπος στον οποίο εκτείνεται η δράση του ποσοδείκτη καλείται **εμβέλεια ή ακτίνα** αυτού ακόμη και στην περίπτωση που αυτός δεν είναι της απλής μορφής $A(\chi)$ ή $A(\chi_1, \chi_2, \ldots\chi_v)$. Έτσι, στην έκφραση $\forall\chi(A(\chi)\rightarrow B(\chi))$, η εμβέλεια του καθολικού ποσοδείκτη είναι ο τύπος $A(\chi)\rightarrow B(\chi)$.

Εδώ πρέπει να πούμε ότι ο καθολικός ποσοδείκτης εμφανίζεται να δρα συνήθως σε υποθετικές προτάσεις επειδή είναι πολύ συχνή η χρήση προτάσεων που έχουν την ίδια μορφή με την (1), δηλαδή προτάσεων με τις οποίες αποφαινόμαστε ότι κάθε τι που έχει μια ιδιότητα θα έχει και μιαν άλλη.

Συνήθως αυτές οι προτάσεις παράγονται από τύπο οπως ο πιο πάνω. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1, στο πλαίσιο της αριστοτελικής λογικής μια τέτοια πρόταση καλείται **καθολική καταφατική.**

Ας δούμε τώρα την πρόταση.

(6) «ουδείς πλανήτης είναι αυτόφωτος».

Αυτή είναι ταυτόσημη με την

(7) «κάθε τι που είναι πλανήτης δεν είναι αυτόφωτο».

Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως, βλέπουμε ότι η πρόταση (6) έχει τον τύπο $\forall\chi(A(\chi)\rightarrow\neg B(\chi))$. Όπως έχουμε πει στο κεφάλαιο 1, στο πλαίσιο της αριστοτελικής λογικής κάθε πρόταση αυτής της μορφής καλείται **καθολική αποφατική.**

Η πρόταση

(8) «μερικά φυτά είναι θάμνοι»

είναι ταυτόσημη με την

(9) «υπάρχει τουλάχιστον ένας οργανισμός, ο οποίος είναι φυτό και θάμνος».

Είναι φανερό πως παράγονται και οι δύο από τον τύπο $\exists\chi(A(\chi)\wedge B(\chi))$. Ο υπαρκτικός ποσοδείκτης εμφανίζεται να δρα συνήθως σε συζευκτικές προτάσεις, επειδή είναι πολύ συχνή η χρήση προτάσεων που έχουν την ίδια μορφή με την (8), δηλαδή προτάσεων με τις οποίες αποφαινόμαστε ότι υπάρχουν πράγματα που έχουν δύο ιδιότητες. Συνήθως αυτές οι προτάσεις παράγονται από τύπο όπως ο πιο πάνω. Έχουμε ήδη πει ότι μια τέτοια πρόταση καλείται **μερική καταφατική.**

Η πρόταση

(10) «μερικά φυτά δεν είναι θάμνοι»

είναι ταυτόσημη με την

(11) «υπάρχει τουλάχιστον ένας οργανισμός, ο οποίος είναι φυτό και δεν είναι θάμνος».

Και οι δύο προτάσεις έχουν τον τύπο: $\exists\chi(A(\chi)\wedge\neg B(\chi))$. Μια τέτοια πρόταση καλείται **μερική αποφατική**.

Ασκήσεις

1. Να εκφραστούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

   i. Κάθε φυτό έχει χλωροφύλλη.

   ii. Μερικά φυτά έχουν χλωροφύλλη.

   iii. Ουδείς πλανήτης είναι αυτόφωτος.

   iv. Μερικοί πλανήτες δεν είναι αυτόφωτοι

6. Πολλαπλή Ποσόδειξη*

Ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες προτάσεις της νεοελληνικής γλώσσας

(1) υπάρχει κάτι ψηλότερο από τον Πάρνωνα

(2) υπάρχει κάτι ψηλότερο από τον πύργο των Αθηνών

(3) υπάρχει κάτι ψηλότερο από τον πύργο του Eiffel.

Για να είναι περισσότερο εμφανής η δομή τους, αυτές μπορούν να αναδιατυπωθούν με τον ακόλουθο τρόπο:

(4) υπάρχει ένα τουλάχιστον πράγμα, το οποίο είναι ψηλότερο από τον Πάρνωνα.

(5) υπάρχει ένα τουλάχιστον πράγμα, το οποίο είναι ψηλότερο από τον πύργο των Αθηνών.

(6) υπάρχει ένα τουλάχιστον πράγμα, το οποίο είναι ψηλότερο από τον πύργο του Eiffel.

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέρος και των τριών είναι η έκφραση "υπάρχει ένα τουλάχιστον πράγμα". Συνεπώς, η συμβολική παράσταση και των τριών περιέχει υπαρκτικό ποσοδείκτη. Το δεύτερο μέρος

τους προέρχεται από το διμελές κατηγόρημα «...είναι ψηλότερο από...». Την πρώτη θέση, με την οποία συντάσσεται αυτό, την κατέχει η έκφραση "το οποίο" που αναφέρεται στη λέξη "πράγμα". Συνεπώς, και οι δυο τους αντιστοιχούν στην ίδια ατομική μεταβλητή, ας πούμε χ. Τη δεύτερη θέση με την οποία συντάσσεται αυτό το κατηγόρημα, κατέχουν τα ονόματα "Πάρνων", "πύργος των Αθηνών" και "πύργος του Eiffel". Αν επιλέξουμε το Α ως σύμβολο του κατηγορήματος «... είναι ψηλότερο από...» και τα α,β και γ ως σύμβολα των αντιστοίχων ονομάτων, τότε είναι φανερό πως οι (4), (5) και (6) συμβολίζονται με ∃χΑ(χ,α), ∃χΑ(χ,β) και ∃χΑ(χ,γ) αντιστοίχως.

Παρατηρούμε ότι όπως οι (4), (5) και (6) προκύπτουν από την διαδοχή:

«υπάρχει ένα τουλάχιστον πράγμα, το οποίο είναι ψηλότερο από...» αν συμπληρώσουμε το κενό με ένα όνομα, έτσι και οι πιο πάνω τρεις συμβολικές εκφράσεις προκύπτουν από την ∃χΑ(χ,ψ) με την αντικατάσταση του ψ από τα α, β και γ. Βλέπουμε λοιπόν ότι **ένας ποσοδείκτης μπορεί να επισυναφθεί σε έναν τύπο που περιέχει εμφανίσεις δυο μεταβλητών και κατ' επέκταση και περισσοτέρων.** Η επισύναψη ενός ποσοδείκτη ως προς τη μια μεταβλητή σε ένα τύπο δεσμεύει τις εμφανίσεις της αντίστοιχης μεταβλητής του τύπου αλλά αφήνει ελεύθερες τις υπόλοιπες εμφανίσεις μεταβλητών. Στην πιο πάνω έκφραση ∃χΑ(χ,ψ) ο υπαρκτικός ποσοδείκτης ∃χ δεσμεύει την χ αλλά αφήνει ελεύθερη την ατομική μεταβλητή ψ, στη θέση της οποίας μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιοδήποτε όνομα.

Από όσα προηγήθηκαν συμπεραίνουμε ότι η επισύναψη ενός ποσοδείκτη σε ένα· τύπο ελαττώνει τον αριθμό των μεταβλητών με ελεύθερες εμφανίσεις του τύπου κατά ένα. Για παράδειγμα, η επισύναψη του ∀χ στο Β(χ)δημιουργεί την έκφραση ∀χΒ(χ). Η επισύναψη του ∃ψ στον τύπο Γ(χ,ψ,ω)με **τρεις** μεταβλητές δημιουργεί την έκφραση ∃ψΓ(χ,ψ,ω), η οποία είναι τύπος με ελεύθερες εμφανίσεις των δυο μεταβλητών χ και ω.

Εδώ πρέπει να πούμε ότι, αν μια συμβολική έκφραση, όπως η ∀χΒ(χ), δεν έχει ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών ή δεν έχει μεταβλητή, αποτελεί το σύμβολο μιας συγκεκριμένης πρότασης της φυσικής γλώσσας. Σε μια τέτοια έκφραση δεν επισυνάπτουμε ποσοδείκτη.

Ας θεωρήσουμε την έκφραση ∀ψΑ(χ,ψ). **Καθώς αυτή περιέχει ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής χ μπορούμε να επισυνάψουμε υπαρκτικό ποσοδείκτη ως προς τη χ.** Έτσι, παίρνουμε την έκφραση

$\exists\chi\forall\psi A(\chi,\psi)$, η οποία περιέχει δύο ποσοδείκτες. Συνεπώς, είναι δυνατό να έχουμε συμβολικές εκφράσεις που περιέχουν δύο ή περισσότερους ποσοδείκτες. Η εμβέλεια του καθολικού ποσοδείκτη στην πιο πάνω έκφραση είναι η $A(\chi,\psi)$, ενώ η εμβέλεια του υπαρκτικού είναι η $\forall\psi A(\chi,\psi)$. **Γενικότερα, αν έχουμε έναν τύπο που περιέχει μια τουλάχιστον ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής-ανεξαρτήτως του αν αυτός περιέχει ποσοδείκτη ή όχι - μπορούμε να του επισυνάψουμε έναν ποσοδείκτη ως προς αυτήν τη μεταβλητή.** Ο τρόπος γραφής των συμβολικών εκφράσεων που προκύπτουν έτσι θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.

Ας υποθέσουμε τώρα πως έχουμε το κατηγόρημα «... είναι μεγαλύτερος από...», το οποίο συμβολίζουμε με Μ και ας κατασκευάσουμε τις συμβολικές εκφράσεις

(i) $\forall\psi\,\exists\chi M(\chi,\psi)$

(ii) $\exists\chi\forall\psi M(\chi,\psi)$

(iii) $\forall\chi\,\exists\psi M(\chi,\psi)$ και

(iv) $\exists\psi\forall\chi\, M(\chi,\psi)$.

Η πρώτη είναι το σύμβολο της ακόλουθης πρότασης της φυσικής γλώσσας

(7) «για κάθε τι υπάρχει ένα τουλάχιστον πράγμα μεγαλύτερό του»

Η δεύτερη είναι το σύμβολο της ακόλουθης

(8) «υπάρχει ένα τουλάχιστον πράγμα, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το κάθε τι».

Η τρίτη είναι σύμβολο της ακόλουθης πρότασης της φυσικής γλώσσας

(9) «το κάθε τι είναι μεγαλύτερο από ένα τουλάχιστο πράγμα»

Η τελευταία είναι σύμβολο της

(10) «υπάρχει ένα τουλάχιστον πράγμα τέτοιο ώστε κάθε τι είναι μεγαλύτερό του»

Ιστορία 5η — *Ο Καλύτερος Τενίστας*

Ο κ. Παπαδόπουλος, η αδελφή του, ο γιος του και η κόρη του είναι όλοι τενίστες. Γνωρίζουμε γι' αυτούς τα εξής:
(α) Ο/η δίδυμος του καλύτερου τενίστα και ο χειρότερος τενίστας έχουν αντίθετο φύλο, (β) ο καλύτερος και ο χειρότερος τενίστας έχουν την ίδια ηλικία.
Ποιος είναι ο καλύτερος τενίστας;

Αυτές είναι βεβαίως γενικές και ασαφείς καθώς δεν έχουμε καθορίσει το σύνολο αναφοράς των μεταβλητών χ και ψ. Γι' αυτό προχωράμε σε μια ερμηνεία τους που τις κάνει να έχουν σαφή και καθορισμένη σημασία. Θεωρούμε λοιπόν ότι το σύνολο αναφοράς των μεταβλητών χ και ψ είναι οι φυσικοί αριθμοί 0,1,2,3,... και επίσης δεχόμαστε ότι το κατηγόρημα «... είναι μεγαλύτερος από...» σημαίνει «ο αριθμός... είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό...».

Τότε η (7) ερμηνεύεται ως

(7′) «για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερός του».

Η (8) ερμηνεύεται ως

(8′) «υπάρχει ένας τουλάχιστον φυσικός αριθμός, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από κάθε φυσικό αριθμό».

Η (9) ερμηνεύεται ως

(9′) «κάθε φυσικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν τουλάχιστον φυσικό αριθμό».

Η (10) ερμηνεύεται ως

(10′) «υπάρχει ένας τουλάχιστον φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε κάθε φυσικός αριθμός είναι μεγαλύτερός του»

Είναι φανερό πως η (7′) είναι αληθής πρόταση, ενώ η (8') είναι ψευδής. Καθώς αυτές συνιστούν ερμηνείες προτάσεων της φυσικής γλώσσας που προέρχονται από τις εκφράσεις (i) και (ii) προκύπτει ότι αυτές δεν έχουν την ίδια λειτουργία, δεν είναι ισοδύναμες. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της σειράς πρόταξης των δύο ποσοδεικτών και μεταβάλλει τη σημασία των δύο ποσοδεικτών ∃ και ∀ μεταβάλλει τη σημασία των συμβολιζομένων προτάσεων. Επίσης, είναι φανερό ότι οι προτάσεις (9′) και (10′) δεν έχουν την ίδια σημασία.

Παρατηρούμε επίσης ότι οι εκφράσεις ∃χ∃ψΜ(χ,ψ) και ∃ψ∃χΜ(χ,ψ) συμβολίζουν τις προτάσεις

(11) «υπάρχει πράγμα για το οποίο υπάρχει κάτι του οποίου είναι μεγαλύτερο» και

(12) «υπάρχει πράγμα για το οποίο υπάρχει κάτι που είναι μεγαλύτερό του»,

που έχουν την ίδια σημασία ανεξαρτήτως του πώς θα τις ερμηνεύσουμε. Το ίδιο ισχύει και για τις εκφράσεις ∀χ∀ψΜ(χ,ψ) και ∀ψ∀χΜ(χ,ψ). Συνεπώς, για ποσοδείκτες του ίδιου είδους δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία εμφανίζονται.

Ασκήσεις

1. Να εκφρασθούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

i. Κάθε τι στηρίζεται κάπου.

ii. Υπάρχει κάτι μικρότερο από το κάθε τι.

iii. Κάθε τι είναι μικρότερο από κάτι.

iv. Κάτι στηρίζει το κάθε τι.

7. Τύποι *

Από όσα προηγήθηκαν γίνεται αντιληπτό ότι οι διάφορες προτάσεις της φυσικής *γλώσσας* συμβολίζονται με εκφράσεις της συμβολικής γλώσσας, τις οποίες, όπως είπαμε στα προηγούμενα τις καλούμε τύπους. Οι τύποι κατασκευάζονται με τη βοήθεια ατομικών μεταβλητών, ατομικών σταθερών, κατηγορηματικών σταθερών, των συνδέσμων $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$, ποσοδεικτών και παρενθέσεων. Όπως φαίνεται από τους τύπους που έχουμε κατασκευάσει μέχρι τώρα, η στοιχειώδης δομική μονάδα από την οποίαν κατασκευάζονται είναι οι συμβολικές εκφράσεις απλών προτάσεων της μορφής υποκείμενο-κατηγόρημα. Οι εκφράσεις αυτές αποτελούνται από μια κατηγορηματική σταθερά, η οποία ακολουθείται από τόσες ατομικές σταθερές ή μεταβλητές όσες και οι θέσεις του κατηγορήματος που αντιστοιχεί στην κατηγορηματική σταθερά: $P(\chi)$, $\Delta(\psi,\chi)$, $A(\beta)$, $O(\chi)$ κτλ. Τέτοιοι τύποι καλούνται ατομικοί, διότι δεν είναι δυνατό να αναλυθούν πιο πέρα. Αποτελούν τα έσχατα δομικά στοιχεία που μπορούν να συμβολίσουν προτάσεις της απλής μορφής υποκείμενο-κατηγόρημα. Χρησιμοποιώντας ατομικούς τύπους, λογικούς συνδέσμους, ποσοδείκτες και παρενθέσεις κατασκευάζουμε τύπους. Στη συνέχεια, δίνουμε τους κανόνες στους οποίους υπακούει η κατασκευή τους. Χρησιμοποιούμε τα φ_1, φ_2, φ_3, ...για να δηλώνουμε τύπους και τα τ_1, τ_2, ...τ_ν... για να δηλώνουμε ατομικές σταθερές ή ατομικές μεταβλητές.

1. Αν το Α είναιένα ν-μελές κατηγορηματικό σύμβολο, τότε η έκφραση $A(\tau_1,\tau_2...\tau_\nu)$ είναι ένας (ατομικός) τύπος.

2. Αν ο φ_1 είναι τύπος, τότε η συμβολική έκφραση $\neg\varphi_1$ είναι τύπος.

3. Αν οι φ_1 και φ_2 είναι τύποι, τότε οι συμβολικές εκφράσεις $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ είναι τύποι.

4. Αν ο φ_1 είναι τύπος, ο οποίος περιέχει μια τουλάχιστον ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής τ_1, τότε οι συμβολικές εκφράσεις $\exists\tau_1\varphi_1$, $\forall\tau_1\varphi_1$ είναι τύποι.

5. Οι μόνες συμβολικές εκφράσεις που είναι τύποι είναι αυτές που κατασκευάζονται με τους προηγούμενους κανόνες.

Με τον κανόνα 3 εισάγουμε ζεύγη παρενθέσεων στους τύπους. Όταν όμως ένας ζεύγος παρενθέσεων είναι το ακραίο δομικό στοιχείο του τύπου, όπως για παράδειγμα στον $(\exists\chi A(\chi) \rightarrow \forall\psi B(\psi))$, δηλαδή όταν ο τύπος θεωρείται μόνος του τότε το παραλείπουμε και γράφουμε απλώς $\exists\chi A(\chi) \rightarrow \forall\psi B(\psi)$.

Πρέπει όμως να προσέξουμε ότι στον τύπο, για παράδειγμα.

$\forall\chi(A(\chi) \rightarrow B(\chi))$

το ζεύγος των παρενθέσεων δεν είναι εξωτερικό, αφού ο καθολικός ποσοδείκτης βρίσκεται εκτός αυτών. Συνεπώς, δεν μπορούμε να το αφαιρέσουμε.

Ξεκινώντας από τους ατομικούς τύπους, με τη βοήθεια των πιο πάνω κανόνων μπορούμε να κατασκευάσουμε ατέρμονα ποικιλία τύπων. Για παράδειγμα, οι εκφράσεις $A(\chi)$, $B(\chi,\psi)$ είναι τύποι (λόγω του κανόνα 1), οι $\neg A(\chi)$, $\exists\psi B(\chi,\psi)$ είναι τύποι (λόγω των κανόνων 2 και 4), οι $\neg\neg A(\chi)$, $\exists\chi\neg A(\chi)$, $\neg\exists\psi B(\chi,\psi)$, $\forall\chi\exists\psi B(\chi,\psi)$ είναι τύποι (λόγω των κανόνων 2 και 4), οι $(\neg\neg A(\chi) \vee \forall\chi\exists\psi B(\chi,\psi))$, $(\exists\chi\neg A(\chi) \rightarrow \neg A(\chi))$ είναι τύποι – με ή χωρίς τις παρενθέσεις – λόγω του κανόνα 3) κτλ.

Όταν σε έναν τύπο δεν υπάρχει ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής, τότε ο τύπος λέγεται **πρόταση στο πλαίσιο της συμβολικής γλώσσας της κατηγορηματικής γλώσσας.**

Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν οι ακόλουθες εκφράσεις είναι τύποι:

i. $\forall\chi B(\chi,\chi)$ ii. $\exists\chi B(\alpha,\alpha)$ iii. $B(\alpha,\alpha)$

iv. $\forall\chi(A(\psi) \rightarrow B(\alpha,\psi))$ v. $\forall\chi\exists\chi A(\chi)$

vi. $\exists\chi A(\chi) \rightarrow \forall\psi B(\psi,\psi)$

8. Μεταφορά σε Συμβολική Γλώσσα*

Στα προηγούμενα είδαμε πώς μπορούμε να μεταφέρουμε, να μεταφράσουμε δηλαδή, σε συμβολική γλώσσα ορισμένες προτάσεις της φυσικής γλώσσας, οι οποίες έχουν σχετικώς απλή δομή. Εδώ θα δούμε πώς μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο για προτάσεις με συνθετότερη μορφή.

Ας δούμε για παράδειγμα, τις προτάσεις

(1) «κάθε επίπεδο σχήμα, που είναι ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο».

(2) «κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο αλλά δεν είναι κάθε ορθογώνιο τετράγωνο» και

(3) «υπάρχει ένα υγρό, στο οποίο διαλύεται κάθε στερεό».

Αυτό που προσπαθούμε καταρχήν να κάνουμε, για να πετύχουμε τη μεταφορά μιας πρότασης στη συμβολική γλώσσα, είναι να την παραφράσουμε. Δηλαδή να της δώσουμε μια διαφορετική μορφή, πιο αναλυτική, και συνεπώς λιγότερο φυσική, σε τρόπο ώστε να αναδεικνύονται οι λογικές συνιστώσες της, οι οποίες συχνά είναι καλυμμένες, καθώς και οι απλές προτάσεις της μορφής υποκείμενο-κατηγόρημα. Ως λογικές συνιστώσες μιας πρότασης θεωρούμε τους συνδέσμους και τους ποσοδείκτες.

Συνεπώς, ακολουθούμε την εξής διαδικασία στην προσπάθεια παράφρασης μιας πρότασης

• Εντοπίζουμε, αν υπάρχουν, τις εκφράσεις που συμβολίζονται με ποσοδείκτη.

• Εντοπίζουμε τα κατηγορήματα και τα υποκείμενα, δηλαδή αναδεικνύουμε όλες τις στοιχειώδεις δομικές μονάδες της μορφής υποκείμενο-κατηγόρημα. (Πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι με τον όρο κατηγόρημα εννοούμε και πολυμελείς σχέσεις).

• Εντοπίζουμε τις λέξεις, οι οποίες αναφέρονται στο ίδιο πράγμα και συνεπώς αντιστοιχούν στην ίδια ατομική σταθερά ή μεταβλητή.

• Εντοπίζουμε τους συνδέσμους.

• Προσδιορίζουμε την εμβέλεια δράσης των συνδέσμων και των ποσοδεικτών.

• Εντοπίζουμε την κύρια λογική συνιστώσα. Δηλαδή το σύνδεσμο ή τον ποσοδείκτη του οποίου η εμβέλεια δράσης καλύπτει κάθε μέρος της πρότασης. Στη συνέχεια, κάνουμε το ίδιο για τα μέρη της μέχρις

ότου να γίνει φανερή η δομή ολόκληρης της πρότασης.

Μια παράφραση της (1) μπορεί να είναι η πρόταση

(1′): «κάθε τι το οποίο είναι επίπεδο σχήμα και το οποίο είναι ορθογώνιο, αυτό είναι παραλληλόγραμμο

ή η πρόταση

(1″): «για κάθε τι έχουμε ότι αν αυτό είναι επίπεδο σχήμα και αυτό είναι ορθογώνιο, τότε αυτό θα είναι παραλληλόγραμμο».

Skolem

Ας επιλέξουμε τα Σ, Ο και Π για να συμβολίσουμε τα τρία κατηγορήματα *είναι επίπεδο σχήμα, είναι ορθογώνιο* και *είναι παραλληλόγραμμο*. Είναι φανερό ότι η κύρια λογική συνιστώσα στην (1″) είναι ο καθολικός ποσοδείκτης, αφού δρα σε ολόκληρο το τμήμα της πιο πάνω έκφρασης που απομένει αν τον παραλείψουμε. Στο τμήμα αυτό η κύρια λογική συνιστώσα είναι η συνεπαγωγή. Ο ηγούμενος όρος της είναι σύζευξη δυο απλών προτάσεων και ο επόμενος όρος είναι μια απλή πρόταση. Η σύζευξη έχει ως σύμβολο το $\Sigma(\chi)\wedge O(\chi)$ και αποτελεί τον ηγούμενο όρο της υποθετικής πρότασης. Η συνεπαγωγή δρα σε ολόκληρη τη σύζευξη και για το λόγο αυτό την περιβάλλουμε με ζεύγος παρενθέσεων οπότε η συνεπαγωγή έχει ως σύμβολο την $(\Sigma(\chi) \wedge O(\chi))\rightarrow\Pi(\chi)$. Ο καθολικός ποσοδείκτης δρα σε ολόκληρη τη συνεπαγωγή. Συνεπώς, την περιβάλλουμε και αυτήν με ένα ζεύγος παρενθέσεων για να δηλώσουμε ότι συνιστά στο σύνολό της την εμβέλεια του ποσοδείκτη. Τότε η (5), και συνεπώς και η (1), συμβολίζεται με την έκφραση

$$\forall\chi((\Sigma(\chi)\wedge O(\chi))\rightarrow\Pi(\chi)).$$

Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε με την πρόταση (2). Οι δύο εμφανίσεις της λέξης "κάθε" υποδηλώνουν την παρουσία δύο καθολικών ποσοδεικτών. Η έκφραση «κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο» έχει την ίδια σημασία με την πρόταση

(α): «για κάθε τι ισχύει ότι αν αυτό είναι τετράγωνο, τότε αυτό είναι ορθογώνιο».

Η έκφραση «είναι κάθε ορθογώνιο τετράγωνο» έχει την ίδια σημασία με την πρόταση

(β): «για κάθε τι ισχύει ότι αν αυτό είναι ορθογώνιο, τότε αυτό είναι τετράγωνο».

Τα κατηγορήματα που υπάρχουν είναι το "είναι τετράγωνο" για το οποίο επιλέγουμε ως σύμβολο το Τ και το "είναι ορθογώνιο".

Η κύρια λογική συνιστώσα στην (2) είναι η σύζευξη που υποδηλώνεται με τη λέξη "αλλά". Το πρώτο μέρος της σύζευξης είναι η (α)

και το δεύτερο η έκφραση «δεν είναι κάθε ορθογώνιο τετράγωνο», η οποία αποτελεί την άρνηση της (β). Συνεπώς το δεύτερο έχει την ίδια σημασία με την πρόταση

(γ): «δεν ισχύει πως για κάθε τι έχουμε ότι αν αυτό είναι ορθογώνιο τότε αυτό είναι τετράγωνο».

Έτσι, η (2) έχει την ίδια σημασία με την πρόταση

(2′′): «για κάθε τι ισχύει ότι, αν αυτό είναι τετράγωνο, τότε αυτό είναι ορθογώνιο και δεν ισχύει πως για κάθε τι έχουμε ότι, αν αυτό είναι ορθογώνιο, τότε αυτό είναι τετράγωνο».

Στο πρώτο μέρος η κύρια λογική συνιστώσα είναι ο καθολικός ποσοδείκτης, ο οποίος δρα σε μια υποθετική πρόταση με όρους δύο απλές προτάσεις. Η πρόταση αυτή έχει ως σύμβολο την $T(\chi)\rightarrow O(\chi)$. Επειδή ο καθολικός ποσοδείκτης δρα στο σύνολό της, την περιβάλλουμε με ζεύγος παρενθέσεων και συνεπώς το σύμβολο του πρώτου μέρους είναι η $\forall\chi(T(\chi)\rightarrow O(\chi))$. Στο δεύτερο μέρος η κύρια λογική συνιστώσα είναι η άρνηση, αφού αυτή δρα σε όλη την έκφραση (β). Η (β) έχει ως κύρια λογική συνιστώσα τον καθολικό ποσοδείκτη, ο οποίος δρα σε μια υποθετική πρόταση με όρους δύο απλές προτάσεις. Σε αυτήν την πρόταση της φυσικής γλώσσας αντιστοιχεί ο τύπος $O(\chi)\rightarrow T(\chi)$. Σε αυτή τη συμβολική έκφραση δρα ο καθολικός ποσοδείκτης, επομένως την περιβάλλουμε με ζεύγος παρενθέσεων και παίρνουμε την $\forall\chi(O(\chi)\rightarrow T(\chi))$. Σε αυτή δρα η άρνηση, επομένως την περιβάλλουμε και αυτή με ζεύγος παρενθέσεων και παίρνουμε την $\neg(\forall\chi(O(\chi)\rightarrow T(\chi)))$. Έτσι η (2′), και συνεπώς και η (2), συμβολίζεται με την έκφραση.

$$\forall\chi(O(\chi)\rightarrow T(\chi))\wedge\neg(\forall\chi(O(\chi)\rightarrow T(\chi))).$$

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε το εξής: Ο καθολικός ποσοδείκτης του πρώτου μέρους αυτής της σύζευξης δρα μόνον στο τμήμα $O(\chi)\rightarrow T(\chi)$ και επομένως δεσμεύει μόνον αυτές τις δύο εμφανίσεις της μεταβλητής χ. Οι άλλες δύο εμφανίσεις της χ στο μέρος $O(\chi)\rightarrow T(\chi)$ δεσμεύονται από τον δεύτερο. Έτσι, καθώς τα δύο αυτά μέρη είναι ανεξάρτητα ως προς το ζήτημα της χρήσης των ποσοδεικτών και των μεταβλητών, μπορούμε να αντικαταστήσουμε όλες τις εμφανίσεις της μεταβλητής χ στο ένα από τα δύο μέρη με μιαν άλλη, για παράδειγμα, την ψ. Έτσι, μπορούμε να συμβολίσουμε την (2) με την $\forall\chi(O(\chi)\rightarrow T(\chi))\wedge\neg(\forall\psi(O(\psi)\rightarrow T(\psi)))$, χωρίς αυτό να μεταβάλλει σε τίποτε τη λειτουργικότητα του συμβολισμού.

Ας δούμε τώρα την πρόταση (3). Η (3) είναι ταυτόσημη με την (3′): «υπάρχει κάτι το οποίο είναι υγρό και στο οποίο διαλύεται κάθε στερεό».

Η παρουσία της έκφρασης «υπάρχει κάτι» δηλώνει την παρουσία υπαρκτικού ποσοσείκτη, ο οποίος θα δρα στην πρόταση

(δ): «το οποίο είναι υγρό και στο οποίο διαλύεται κάθε στερεό».

Αυτή έχει ως κύρια λογική συνιστώσα τη σύζευξη. Το πρώτο μέρος της συζευκτικής πρότασης είναι η έκφραση «το οποίο είναι υγρό». Εδώ υπάρχει το κατηγόρημα "είναι υγρό" το οποίο ας συμβολίσουμε με Υ. Έτσι, το πρώτο μέρος συμβολίζεται με Υ(χ). Το δεύτερο μέρος λέει ότι «κάθε στερεό διαλύεται σε αυτό το υγρό», το οποίο είναι ταυτόσημο με την

(ε) «για κάθε τι ισχύει ότι, αν αυτό είναι στερεό τότε αυτό διαλύεται σε εκείνο (το υγρό)».

Η κύρια λογική συνιστώσα που αντιστοιχεί σε αυτό το μέρος είναι ο καθολικός ποσοδείκτης που δρα στην(ζ): «αν αυτό είναι στερεό, τότε αυτό διαλύεται σε εκείνο (το υγρό)».

Αυτή είναι μια υποθετική πρόταση. Εδώ υπάρχουν δύο κατηγορήματα: το «...είναι στερεό» το οποίο ας το συμβολίσουμε με Ρ και το διμελές «... διαλύεται στο...», το οποίο ας το συμβολίσουμε με Δ. Εδώ πρέπει να προσέξουμε ότι η λέξη "εκείνο" αναφέρεται σε ό,τι αναφέρεται και η λέξη "αυτό" του πρώτου μέρους και όχι όπου αναφέρεται η λέξη "αυτό" του δεύτερου μέρους. Συνεπώς στη λέξη "αυτό" του δεύτερου μέρους πρέπει να αντιστοιχίσουμε όχι τη μεταβλητή χ που χρησιμοποιήσαμε στο πρώτο μέρος, αλλά μια άλλη μεταβλητή, για παράδειγμα, την ψ.

υπάρχει κάτι το οποίο είναι υγρό και για κάθε τι ισχύει ότι αν αυτό είναι στερεό, τότε αυτό διαλύεται σε εκείνο
χ χ ψ ψ ψ χ

$$\exists\chi(Y(\chi)\wedge\forall\psi(P(\psi)\rightarrow\Delta(\psi,\chi)))$$

Έτσι η έκφραση (ζ) συμβολίζεται $P(\psi)\rightarrow\Delta(\psi,\chi)$ και (ε) συμβολίζεται $\forall\psi(P(\psi)\rightarrow\Delta(\psi,\chi))$, οπότε η (δ) συμβολίζεται $Y(\chi)\wedge\forall\psi(P(\psi)\rightarrow\Delta(\psi,\chi))$. Επειδή ο υπαρκτικός ποσοδείκτης δρα σε όλον αυτόν τον τύπο, τον περιβάλλουμε με ένα ζεύγος παρενθέσεων, οπότε η (3′), και συνεπώς η (3), συμβολίζεται $\exists\chi(Y(\chi)\wedge\forall\psi(P(\psi)\rightarrow\Delta(\psi,\chi)))$.

Ασκήσεις

1. Να εκφρασθούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

i. Κάθε ένας αγαπάει κάποιον αλλά δεν υπάρχει κάποιος που τον αγαπούν όλοι

ii. Ουδέν είναι λευκό ή μαύρο. Υπάρχουν μόνον γκρι πράγματα.

iii. Ο Θεός βοηθάει όποιον βοηθάει τον εαυτό του. (Benzamin Franklin)

iv. Δεν υπάρχει καλός πόλεμος ή όχι καλή ειρήνη. (Benzamin Franklin)

v. Κάποιο κορίτσι αυτού του τμήματος είναι ψηλότερο από όλα τα αγόρια του τμήματος.

vi. Για κάθε σώμα υπάρχει ένα σώμα μικρότερό του.

9. Παραδείγματα Τυποποίησης Προτάσεων της ΦυσικήςΓλώσσας και Επιχειρημάτων*

Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα τυποποίησης προτάσεων της φυσιής γλώσσας.

1. «Κάθε αγαθό, εκτός των βιβλίων, έχει ΦΠΑ 18%».

«... είναι αγαθό»: Α, «... είναι βιβλίο»: Β, «... έχει ΦΠΑ 18%»: Γ. Παράφραση: «για κάθε τι, αν αυτό είναι αγαθό και δεν είναι βιβλίο, τότε αυτό έχει ΦΠΑ 18%».

Τύπος: $\forall\chi((A(\chi)\wedge\neg B(\chi))\rightarrow\Gamma(\chi))$.

2. « «Τα κρέατα και τα γαλακτοκομικά έχουν χοληστερίνη».

«...είναι κρέας»: Α, «... είναι γαλακτοκομικό»: Β, «... έχει χοληστερίνη»: Γ.

Παράφραση: «για κάθε τι, αν αυτό είναι κρέας ή αυτό είναι γαλακτοκομικό, τότε αυτό έχει χοληστερίνη».

Τύπος: $\forall\chi((A(\chi)\vee B(\chi))\rightarrow\Gamma(\chi))$.

3. «Κάθε φυσικός αριθμός που είναι πολλαπλάσιος του 4 είναι άρτιος».

«... είναι φυσικός»: Α, «... είναι πολλαπλάσιος του 4»: Β, «... είναι άρτιος»: Γ.

Παράφραση: «για κάθε τι, αν αυτό είναι φυσικός αριθμός και αυτό είναι πολλαπλάσιο του 4, τότε αυτό είναι άρτιος».

Τύπος: $\forall\chi((A(\chi)\wedge B(\chi))\rightarrow\Gamma(\chi))$.

4. «Μερικά φυτά, αν είναι μονοετή, δεν παράγουν καρπούς».

«... είναι φυτό»: Α, «... είναι μονοετές»: Β, «... παράγει καρπούς»: Γ. Παράφραση: «υπάρχει ένα τουλάχιστον πράγμα τέτοιο ώστε: αυτό είναι φυτό και, αν αυτό είναι μονοετές, τότε αυτό δεν παράγει καρπούς».

Τύπος: $\exists\chi(A(\chi)\wedge(B(\chi)\rightarrow\neg\Gamma(\chi)))$.

5. «Δεν υπάρχουν ιπτάμενοι δίσκοι»

«... είναι ιπτάμενος δίσκος»:Α.

Παράφραση: «δεν υπάρχει πράγμα τέτοιο ώστε: αυτό είναι ιπτάμενος δίσκος».

Τύπος: $\neg\exists\chi A(\chi)$.

6. «Μερικά πράγματα δεν είναι ιπτάμενοι δίσκοι».

Τύπος: $\exists\chi\neg A(\chi)$.

7. «Κάθε τι έχει χρώμα και βάρος».

«... έχει χρώμα»: Α, «... έχει βάρος»: Β.

Παράφραση: για κάθε τι: αυτό έχει χρώμα και αυτό έχει βάρος» ή «κάθε τι έχει χρώμα και κάθε τι έχει βάρος».

Τύπος: $\forall\chi(A(\chi)\wedge B(\chi))$ ή ισοδυνάμως $\forall\chi A(\chi)\wedge\forall\psi B(\Psi)$.

8. «Μερικά πράγματα έχουν χρώμα ή βάρος».

Παράφραση: «υπάρχει πράγμα τέτοιο ώστε: αυτό έχει χρώμα ή αυτό έχει βάρος» ή «υπάρχει κάτι το οποίο έχει χρώμα ή υπάρχει κάτι το οποίο έχει βάρος».

Τύπος: $\exists\chi(A(\chi)\vee B(\chi))$ ή ισοδυνάμως $\exists\chi A(\chi)\vee\exists\psi B(\psi)$.

9. «Κάθε τι έχει χρώμα ή βάρος».

Παράφραση: «για κάθε τι: αυτό έχει χρώμα ή αυτό έχει βάρος».

Τύπος: $\forall\chi(A(\chi)\vee B(\chi))$

10. «Κάθε τι έχει χρώμα ή κάθε τι έχει βάρος».

Τύπος $\forall\chi A(\chi)\vee\forall\psi B(\psi)$.

11. «Κάτι έχει χρώμα και βάρος».

Παράφραση: «υπάρχει πράγμα τέτοιο ώστε: αυτό έχει χρώμα και αυτό έχει βάρος».

Τύπος: $\exists\chi(A(\chi)\wedge B(\chi))$.

12. «Κάτι έχει χρώμα και κάτι έχει βάρος».

Παράφραση: «υπάρχει κάτι το οποίο έχει χρώμα και υπάρχει κάτι το οποίο έχει βάρος».

Τύπος: $\exists\chi A(\chi)\wedge\exists\psi B(\psi)$

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι οι τύποι $\neg\exists\chi\varphi$ και $\forall\chi\neg\varphi$ (φ είναι τύπος με μια τουλάχιστον ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής χ) είναι

ισοδύναμοι με την έννοια ότι μπορούμε να τοποθετούμε τον ένα στη θέση του άλλου.

Το ίδιο ισχύει και για τους τύπους $\neg\forall\chi\varphi$ και $\exists\chi\neg\varphi$. Ανάλογα ισχύουν και για περισσότερες εμφανίσεις ποσοδεικτών.

Ασκήσεις

1. Να εκφρασθούν συμβολικά τα ακόλουθα επιχειρήματα:

   i. Κάθε τι είναι υλικό ή αφηρημένο.
   Τα φαντάσματα δεν είναι υλικά.
   Άρα τα φαντάσματα είναι αφηρημένα

   ii. Κάθε τι ακριβό είναι πολύτιμο και σπάνιο.
   Οτιδήποτε πολύτιμο είναι επιθυμητό.
   Άρα, κάθε τι ακριβό ή πολύτιμο είναι επιθυμητό.

10. Απόδοση Σημασίας στους Τύπους*

Όπως έχουμε πει στα προηγούμενα, οι προτάσεις της φυσικής γλώσσας που συμβολίζονται με ποσοδείκτες παρουσιάζουν μια αβεβαιότητα σημασιολογικού χαρακτήρα. Όταν εκφέρουμε την ακόλουθη πρόταση της φυσικής γλώσσας.

«υπάρχει κάτι ευωδιαστό»

τι εννοούμε; Πού αναφέρεται η λέξη "κάτι"; Σε χημικές ενώσεις; Σε αρώματα; Σε άνθη; Σε οτιδήποτε υπάρχει στον κόσμο μας; Η αβεβαιότητα αυτή μας οδηγεί στο να βρούμε τρόπο καθορισμού της σημασίας των τύπων. Γι' αυτόν το λόγο καθορίζουμε το πού αναφέρεται η λέξη "κάτι". Με άλλα λόγια, αν έχουμε την πιο πάνω πρόταση της φυσικής γλώσσας σε συμβολική μορφή $\exists\chi A(\chi)$, καθορίζουμε τι μπορούμε να τοποθετούμε στη θέση της ατομικής μεταβλητής.

Για να γίνουν κατανοητά τα προηγούμενα ας δούμε το εξής παράδειγμα: Παίρνουμε τους τύπους (1) $\forall\chi(A(\chi)\vee B(\chi))$, (2): $\forall\chi\exists\psi\Gamma(\chi,\psi)$, (3):$\exists\chi\forall\psi\neg\Gamma(\psi,\chi)$, (4): $\forall\chi(\Delta(\chi) \rightarrow\neg A(\chi))$, (5): $\Delta(\alpha)$, (6): $\Delta(\beta)$, οι οποίοι κατασκευάζονται με τη βοήθεια των μονομελών

κατηγορηματικών συμβόλων Α, Β, Δ του διμελούς κατηγορηματικού συμβόλου Γ, των μεταβλητών χ,ψ και των σταθερών α,β. Προβαίνουμε σε δύο ερμηνείες των πιο πάνω τύπων.

Ερμηνεία Ι

Το **σύνολο αναφοράς** είναι οι πρόσκοποι Αντώνης, Βασίλης, Γιώργος, Δημήτρης, Ευάγγελος, Ζαχαρίας, Θεόδωρος, οι οποίοι έχουν κατασκηνώσει σε ένα δάσος. Ο Βασίλης, ο Δημήτρης και ο Ζαχαρίας είναι οι μάγειροι της κατασκήνωσης. Οι Αντώνης, Γιώργος, Ευάγγελος και Ηλίας φυλάνε βάρδια τα βράδια και οι Βασίλης, Δημήτρης, Ζαχαρίας, και Θεόδωρος είναι συντηρητές της κατασκήνωσης. Οι Αντώνης, Γιώργος, Ευάγγελος, Ηλίας είναι συμμαθητές στη Γ΄ γυμνασίου και οι Βασίλης και Θεόδωρος είναι συμμαθητές στην Β΄ γυμνασίου.

Το Α ερμηνεύεται ως «... φυλάγει βάρδια».
Το Β ερμηνεύεται ως «... είναι συντηρητής».
Το Δ ερμηνεύεται ως «... είναι μάγειρος».
Το Γ ερμηνεύεται ως «ο... είναι συμμαθητής του...».
Το α ερμηνεύεται ως "ο Βασίλης" και το β ως "ο Θεόδωρος).
Τότε ο τύπος (1) ερμηνεύεται ως «κάθε κατασκηνωτής φυλάγει βάρδια ή είναι συντηρητής». Ο (2) ως «κάθε κατασκηνωτής έχει τουλάχιστον έναν κατασκηνωτή

Ερμηνεία ΙΙ

Το **σύνολο αναφοράς** είναι τα δέκα ψηφία, δηλαδή οι αριθμοί 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Το Α ερμηνεύεται ως «... είναι άρτιος».
Το Β ερμηνεύεται ως «... είναι περιττός».
Το Δ ερμηνεύεται ως «... είναι πρώτος».
Το Γ ερμηνεύεται ως «.. διαιρεί τον...»
Το α ερμηνεύεται ως 2 και το β ως 4.
Τότε ο τύπος (1) ερμηνεύεται ως «κάθε ψηφίο είναι άρτιο ή περιττό» Ο (2) ως «κάθε ψηφίο διαιρεί ένα τουλάχιστον ψηφίο». Ο (3) ως «υπάρχει ψηφίο

ως συμμαθητή του». Ο (3) ως «υπάρχει κατασκηνωτής που δεν έχει συμμαθητή στην κατασκήνωση» Ο (4) ως «ουδείς μάγειρος ψυλάγει βάρδια». Ο (5) ως «ο Βασίλης είναι μάγειρος» και ο (6) ως «ο Θεόδωρος είναι μάγειρος».

που δεν διαιρείται από οποιοδήποτε ψηφίο». Ο (4) ως «ουδέν πρώτο ψηφίο είναι άρτιο». Ο (5) ως «το 2 είναι πρώτος» και ο (6) ως «το 4 είναι πρώτος».

Παρατηρούμε ότι ο τύπος (1) ερμηνεύεται ως αληθής πρόταση και στις δύο περιπτώσεις. Και οι δύο ερμηνείες του (2) είναι ψευδείς. Η πρώτη ερμηνεία του (3) είναι αληθής, ενώ η δεύτερη ψευδής. (Τι συμβαίνει με τους υπόλοιπους τύπους;)

Με τον τρόπο που είδαμε πιο πάνω καθορίζουμε τη σημασία ενός τύπου ή μιας ομάδας τύπων. Για να γίνει αυτό πρέπει να έχουμε προσδιορίσει:

1. Ένα σύνολο αναφοράς (ή **πεδίο** ή **σύμπαν**), δηλαδή το σύνολο των ατομικοτήτων στο οποίο αναφέρονται οι μεταβλητές που υπάρχουν στους τύπους και

2. Μια αντιστοίχηση

(α) των κατηγορηματικών συμβόλων που υπάρχουν στους τύπους με συγκεκριμένα κατηγορήματα ή σχέσεις που αναφέρονται στα στοιχεία του συνόλου αναφοράς και

(β) των ατομικών σταθερών με συγκεκριμένα ονόματα στοιχείων του συνόλου αναφοράς.

Ιστορία 6η — *Ο Ιδανικός Άντρας για τη Μαρία*

Ο ιδανικός άντρας για τη Μαρία είναι ψηλός, μελαχροινός και ωραίος. Η Μαρία γνωρίζει τέσσερις άντρες, τον Αλέκο, το Βασίλη, το Γιώργο και το Δημήτρη, μόνο ένας από τους οποίους έχει όλα τα σωστά χαρακτηριστικά. Γνωρίζοντας ότι:

(α) τρεις είναι ψηλοί, δυο μελαχροινοί, και μόνο ένας ωραίος

(β) καθένας από τους τέσσερις έχει τουλάχιστον ένα σωστό χαρακτηριστικό

(γ) ο Αλέκος και ο Βασίλης έχουν την ίδια φυσιογνωμία

(δ) ο Βασίλης και ο Γιώργος έχουν το ίδιο ύψος

(ε) ο Γιώργος και ο Δημήτρης δεν είναι ψηλοί,

να βρείτε ποιος από τους τέσσερις είναι ιδανικός για τη Μαρία.

Αν έχουμε τα πιο πάνω, τότε λέμε ότι έχουμε μια **ερμηνεία** του τύπου ή της ομάδας των τύπων.

Μια αποτίμηση των μεταβλητών (που υπάρχουν στους τύπους) σε σχέση με μια ερμηνεία είναι η αντιστοίχηση των μεταβλητών που υπάρχουν σε αυτούς με τα ονόματα συγκεκριμένων στοιχείων του συνόλου αναφοράς.

Μια ομάδα τύπων επιδέχεται οσεσδήποτε ερμηνείες και σε κάθε ερμηνεία μπορούμε να έχουμε πολλές αποτιμήσεις των μεταβλητών.

Είναι φανερό πως μόνον όταν ερμηνεύσουμε έναν τύπο παίρνουμε προτάσεις της φυσικής γλώσσας που έχουν καθορισμένη σημασία. Συνεπώς μόνον στο πλαίσιο μιας ερμηνείας μπορούμε να μιλάμε για αλήθεια ή ψεύδος σε σχέση με τους τύπους της κατηγορηματικής λογικής.

Όσα έχουμε πει στην προτασιακή λογική σχετικά με τα επιχειρήματα ισχύουν και στην κατηγορηματική λογική. Βεβαίως σε ένα σχήμα επιχειρήματος οι τύποι που το απαρτίζουν μπορεί να είναι και τύποι της κατηγορηματικής λογικής. Όπως είπαμε, η αλήθεια ή το ψεύδος εννοούνται μόνον στο πλαίσιο μιας ερμηνείας. Συνεπώς, μπορούμε να αναφερόμαστε στην εγκυρότητα ενός επιχειρήματος μόνον ως προς μια συγκεκριμένη ερμηνεία των τύπων του. Λέμε ότι ένα σχήμα επιχειρήματος είναι έγκυρο όταν και μόνον όταν είναι έγκυρο ως προς κάθε ερμηνεία των όρων του. Ανάλογες παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε για την έννοια της απόδειξης.

Αν αντικασταστήσουμε τους τύπους ενός εγκύρου σχήματος επιχειρήματος του προτασιακού λογισμού με τύπους του κατηγορηματικού λογισμού το σχήμα επιχειρήματος που παίρνουμε είναι έγκυρο.

κεφάλαιο 4

IV. Στοιχεία Πρακτικής Λογικής

1. Επιχείρημα και Επιχειρηματολογία

1.1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο του βιβλίου ασχολούμαστε με τη λογική από πρακτική σκοπιά. Δηλαδή, με το πώς μπορούμε στην καθημερινή μας ζωή, όταν συζητούμε με άλλους ή όταν θέλουμε να γράψουμε ένα κείμενο, να διατυπώνουμε με σωστό τρόπο τις ιδέες μας, να αιτιολογούμε αυτά που λέμε και να είμαστε σε θέση να διακρίνουμε ασυνέπειες ή λάθη σε αυτά που άλλοι λένε ή γράφουν.

Πολύ συχνά οι καθηγητές συμβουλεύουν τους μαθητές να αναπτύξουν κριτική σκέψη και να διατυπώνουν καθαρά και να αναλύουν σωστά τις ιδέες τους. Όταν κάποιος υποστηρίζει μια θέση που δε μας φαίνεται από πρώτη άποψη σωστή, μπορούμε εύλογα να τον ρωτήσουμε: «Τι λόγους έχεις για να πιστεύεις αυτό;» ή ακόμα, «Εξήγησέ μας γιατί αυτό είναι έτσι όπως το λες».

Ακόμα και όταν είμαστε βέβαιοι για τις **πεποιθήσεις μας**, πρέπει πάντα να είμαστε σε θέση να εξηγήσουμε τους λόγους για τους οποίους πιστεύουμε ότι αυτές είναι ορθές. Γιατί οι πεποιθήσεις μας δεν είναι πάντα σωστές, ούτε και οι άλλοι είναι πάντοτε διατεθειμένοι να αποδεχθούν αυτά που εμείς πιστεύουμε.

Βέβαια δεν είναι πάντοτε δυνατόν να μπορούμε να αιτιολογήσουμε

τα πάντα. Μια συζήτηση ανάμεσα σε δύο ανθρώπους, τον Α και τον Β, μπορεί να είναι τελείως αποτυχημένη, αν ο Β ρωτάει συνέχεια "γιατί» σε ό,τι λέει ο Α. Υπάρχουν πάντοτε κάποια πράγματα - κοινές εμπειρίες, αποδεκτές αλήθειες κτλ– στα οποία δύο άνθρωποι συμφωνούν και πάνω σε αυτά μπορεί να στηριχθεί μια συζήτηση. Η άρνηση να δεχθούμε να συμφωνήσουμε με τον άλλο σε οτιδήποτε, μπορεί να οδηγήσει στην έλλειψη κάθε επικοινωνίας.

Μπορούμε να αιτιολογούμε και να εξηγούμε είτε τις πεποιθήσεις μας είτε τις πράξεις μας. Ενδιαφερόμαστε τόσο για το πώς είναι τα πράγματα όσο και για το τι πρέπει να πράττουμε. Έτσι, η ανθρώπινη σκέψη μπορεί να είναι είτε θεωρητική είτε πρακτική, χωρίς να αποκλείεται να συμβαίνουν και τα δύο τα οποία δεν είναι πάντοτε ανεξάρτητα. Πολλές φορές οι πεποιθήσεις μας είναι δυνατό να επηρεάσουν τις πράξεις μας, όπως είναι δυνατόν και το αντίστροφο.

Σε σχέση με τις πεποιθήσεις μας μπορούμε να έχουμε γι' αυτές **κίνητρα, λογικές αιτίες και αιτίες διαμόρφωσής τους**. Σε αυτό το κεφάλαιο του βιβλίου θα ασχοληθούμε μόνο με τους λόγους των πεποιθήσεών μας, γιατί αυτοί ανήκουν στη σφαίρα της λογικής. Όταν λέμε λογικές αιτίες ή λόγους μιας πεποίθησης, εννοούμε διατυπωμένες προτάσεις, από την αλήθεια των οποίων συνεπάγεται, είτε με βεβαιότητα είτε με πιθανότητα, η αλήθεια της πεποίθησής μας. Από την άλλη πλευρά τα κίνητρα και οι αιτίες μπορούν να ανήκουν στις σφαίρες της ηθικής ή της ψυχολογίας. Έτσι, το κίνητρο για μια πράξη μας μπορεί να είναι το πρακτικό μας όφελος. Ακόμα η διαμόρφωση πεποιθήσεων μπορεί να οφείλεται σε ψυχολογικούς λόγους, όπως για παράδειγμα, η πίστη κάποιου ότι «Τα μαύρα σκυλιά είναι επικίνδυνα» μπορεί να οφείλεται σε φόβους ή περιστατικά της παιδικής του ηλικίας.

Για τις ανάγκες του κεφαλαίου αυτού μπορούμε να ονομάσουμε επιχείρημα «το σύνολο των λογικών αιτιών με τις οποίες υποστηρίζουμε μια πεποίθηση ή μια θέση». Αυτός είναι ένας πιο χαλαρός ορισμός από αυτόν που είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, γιατί τώρα ενδιαφερόμαστε για το πρακτικό και μη τυπικό μέρος της λογικής. Έτσι, ένα επιχείρημα δεν είναι απλώς η διατύπωση κάποιων απόψεων. Με τα επιχειρήματα προσπαθούμε να υποστηρίξουμε κάποιες θέσεις ή να αντικρούσουμε άλλες. Λέγοντας επιχειρηματολογία, εννοούμε τη χρήση επιχειρημάτων στη διατύπωση των σκέψεών μας και στην υποστήριξη και θεμελίωση των πεποιθήσεών μας.

1.2. Η Αξία της Επιχειρηματολογίας

Η επιχειρηματολογία είναι ουσιαστικής σημασίας και για την ορθή διατύπωση των απόψεών μας και ως εργαλείο για κριτική σκέψη και αξιολόγηση των πεποιθήσεων άλλων ανθρώπων.

• Η χρήση επιχειρημάτων μας βοηθά να εκτιμήσουμε ποιες θέσεις είναι ορθότερες από άλλες ή πιο σημαντικές. Αυτή η εκτίμηση μπορεί να γίνει, όταν τα επιχειρήματα που στηρίζουν τη μια θέση είναι ισχυρότερα από αυτά που στηρίζουν την άλλη.

• Αναζητώντας λογικές αιτίες μπορούμε να απαλλαγούμε από προκαταλήψεις και από προκατασκευασμένες ιδέες.

• Στηρίζοντας τις θέσεις μας με ισχυρά επιχειρήματα κατορθώνουμε να δείξουμε στους άλλους την ορθότητα των πεποιθήσεών μας και να υπερασπίσουμε τις απόψεις μας από τυχόν αντιρρήσεις.

• Σχεδιάζοντας και διατυπώνοντας με λογική σειρά και καθαρότητα τις σκέψεις μας μπορούμε να αποφασίζουμε ποιες πληροφορίες είναι πράγματι χρήσιμες και πώς να τις χρησιμοποιούμε για την υποστήριξη των θέσεών μας.

• Η επιχειρηματολογία μας βοηθά να αναπτύξουμε την ικανότητα να προχωράμε πιο πέρα από τις πληροφορίες που έχουμε για κάτι, ώστε να βγάζουμε συμπεράσματα και να βλέπουμε ποιες συνέπειες μπορούμε να εξάγουμε από αυτά που άλλοι άνθρωποι λένε ή κάνουν.

• Διαμέσου της επιχειρηματολογίας μπορούμε να αναγνωρίσουμε αντιφάσεις ή ασυνέπειες – τόσο στις δικές μας πεποιθήσεις όσο και στων άλλων– και να προσπαθήσουμε να τις αποφύγουμε.

2. Είδη προτάσεων: προκείμενες - συμπέρασμα

2.1. Προτάσεις

Όταν διατυπώνουμε είτε προφορικά είτε γραπτά τις σκέψεις μας,

ο λόγος μας οργανώνεται σε **προτάσεις**. Μπορούμε να πούμε ότι μια πρόταση είναι ένα σύνολο λέξεων που έχει νόημα και τηρεί τους βασικούς κανόνες της γραμματικής. Για παράδειγμα, ο συνδυασμός των λέξεων «συμβούλους τους ο πρωθυπουργός του για συμβουλεύεται τις εκλογές» δεν είναι πρόταση. Είναι όμως πρόταση ο ακόλουθος συνδυασμός των ίδιων λέξεων: «Ο πρωθυπουργός συμβουλεύεται τους συμβούλους του για τις εκλογές». Είναι όμως δυνατό να έχουμε μια γραμματικά σωστή σειρά λέξεων που όμως να μην έχει νόημα και επομένως να μη θεωρείται πρόταση. Για παράδειγμα: «Η γλώσσα του δένδρου βλέπει τις ακτίνες του σκότους». Βέβαια, μερικές φορές τέτοιου είδους εκφράσεις χρησιμοποιούνται στον ποιητικό λόγο.

Όπως ήδη έχουμε δει στο δεύτερο κεφάλαιο, οι προτάσεις είναι πολλών ειδών. Έχουμε αποφαντικές ή δηλωτικές προτάσεις, ερωτηματικές προτάσεις, προστακτικές προτάσεις, παρακλητικές προτάσεις κτλ. Από όλες αυτές τις προτάσεις η λογική ασχολείται μόνο με τις αποφαντικές ή δηλωτικές προτάσεις, που δηλώνουν γνώμες οι οποίες είναι δυνατόν να χαρακτηρισθούν ως αληθείς ή ψευδείς. Μια αποφαντική πρόταση μπορεί να είναι σύνθετη και να αποτελείται από πολλές απλές αποφαντικές προτάσεις. Για παράδειγμα, η πρόταση «όλοι χρησιμοποιούμε επιχειρήματα στην καθημερινή μας ζωή, αλλά οι περισσότεροι από εμάς δεν έχουν διδαχθεί λογική» αποτελείται από δύο απλές αποφαντικές προτάσεις που συνδέονται με τη λέξη "αλλά". Όταν επομένως επιχειρηματολογούμε ή διατυπώνουμε επιχειρήματα, το βασικό κύτταρο του λογισμού μας είναι η απλή δηλωτική ή αποφαντική πρόταση. Από δω και πέρα όταν λέμε "πρόταση" εννοούμε την αποφαντική ή δηλωτική πρόταση, εκτός και αν υπάρχει ανάγκη διάκρισης.

Άσκηση 1

Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι δηλωτικές ή αποφαντικές και ποιες όχι. Μετά γράψτε τρία δικά σας παραδείγματα αποφαντικών προτάσεων και τρία άλλου είδους προτάσεων.

Α. Γιατί το έκανες αυτό;

Β. Υπάρχει ένα πράσινο βιβλίο πάνω στο τραπέζι.

Γ. Με τιμά πολύ η παρουσία σας.

Δ. Το ψωμί γίνεται από αλεύρι.

Ε. Πρέπει να υπακούμε στους νόμους της χώρας μας.
Ζ. Έλα δω γρήγορα.

Άσκηση 2

Lowenheim

Εντοπίστε τις απλές αποφαντικές προτάσεις ανάμεσα στις παρακάτω:

Α. Όλα τα δέντρα έχουν πράσινα φύλλα και αυτό εδώ είναι ένα δέντρο.

Β. Τα ασημένια κοσμήματα είναι πολύ κοινά, γιατί το ασήμι είναι ένα σχετικά φτηνό μέταλλο και δουλεύεται πολύ εύκολα.

Γ. Σήμερα έχει συννεφιά και είναι πιθανό να βρέξει.

Δ. Δεν είναι φανερό ότι οι καλές τέχνες είναι βασικό στοιχείο του πολιτισμού;

2.2. Προκείμενες και Συμπέρασμα

Σε κάθε επιχείρημα υποστηρίζουμε μια θέση με βάση κάποιους λόγους. Τις προτάσεις με τις οποίες διατυπώνουμε αυτούς τους λόγους τις ονομάζουμε προκείμενες και την πρόταση που υποστηρίζεται από τις προκείμενες την ονομάζουμε συμπέρασμα. Το μικρότερο δυνατό επιχείρημα αποτελείται από δύο αποφαντικές προτάσεις. Μία προκείμενη και ένα συμπέρασμα. Συνήθως όμως υπάρχουν περισσότερες από μία προκείμενες που υποστηρίζουν ένα συμπέρασμα. Μια βασική ικανότητα, που πρέπει να κατέχουμε για να μπορούμε να επιχειρηματολογούμε σωστά, είναι να έχουμε τη δυνατότητα να ξεχωρίζουμε σε κάθε περίπτωση ποιο είναι το συμπέρασμα και ποιες οι προκείμενες. Δεν υπάρχει τίποτε το ιδιαίτερο σε μια αποφαντική πρόταση που την κάνει να είναι προκείμενη ή συμπέρασμα. Τις διακρίνουμε μόνο χάρη στη διαφορετική λειτουργία που έχουν στο επιχείρημα. Η λειτουργία μιας πρότασης σε ένα επιχείρημα καθορίζεται από τις σχέσεις που έχει με τις άλλες προτάσεις.

Ας προσπαθήσουμε να διευκρινίσουμε αυτό το σημείο με ένα παράδειγμα. Έστω οι παρακάτω τρεις προτάσεις:

- Το αυτοκίνητό σου είναι βρώμικο.
- Οδήγησες το αυτοκίνητο μέσα από λάσπες.

• Το αυτοκίνητό σου χρειάζεται πλύσιμο.

Αν με [Π] και [Σ] σημειώνουμε την προκείμενη και το συμπέρασμα αντίστοιχα, μπορούμε να δούμε πώς οι παραπάνω προτάσεις μπορούν να έχουν διαφορετικούς ρόλους σε διαφορετικά επιχειρήματα.

• Το αυτοκίνητό σου είναι βρώμικο [Σ], γιατί οδηγήσες το αυτοκίνητο μέσα από λάσπες [Π].

• Το αυτοκίνητο σου χρειάζεται πλύσιμο [Σ], επειδή το αυτοκίνητό σου είναι βρώμικο [Π].

Βλέπουμε ότι η ίδια πρόταση «το αυτοκίνητό σου είναι βρώμικο» χρησιμοποιείται τη μια φορά ως προκείμενη και την άλλη ως συμπέρασμα. Επομένως, μία πρόταση μπορεί να είναι σε ένα επιχείρημα είτε προκείμενη είτε συμπέρασμα, ανάλογα με τον τρόπο που συνδέεται με τις άλλες προτάσεις. Επίσης, σε σύνθετα επιχειρήματα, μια προκείμενη του βασικού συμπεράσματος μπορεί να είναι συμπέρασμα άλλων προκείμενων.

Στην πράξη, πολλές φορές είναι σχετικά εύκολο να διακρίνουμε προκείμενες από συμπεράσματα, γιατί συνήθως χρησιμοποιούμε μερικές χαρακτηριστικές λέξεις για να εισαγάγουμε τις προκείμενες ή τα συμπεράσματα. Λέξεις που δείχνουν την παρουσία κάποιου συμπεράσματος είναι οι εξής: "Επομένως", "άρα", "(δεν) πρέπει", "συνεπάγεται", "έτσι" κλπ. Από την άλλη, λέξεις όπως "γιατί", "επειδή", "εφ'όσον" κλπ. δείχνουν την παρουσία προκείμενων. Επομένως, όταν σε ένα κείμενο θέλουμε να διακρίνουμε τα επιχειρήματα, πρώτα ψάχνουμε να βρούμε λέξεις που να δηλώνουν την παρουσία συμπεράσματος ή προκείμενων. Αν δεν υπάρχουν τέτοιες λέξεις, τότε πρέπει να βρούμε τη σχέση των διαφόρων προτάσεων μέσα στο κείμενο, ώστε να διαπιστώσουμε αν κάποια πρόταση υποστηρίζεται από άλλες και επομένως είναι ένα συμπέρασμα. Αν δεν μπορούμε στο κείμενό μας να διακρίνουμε κάποιο συμπέρασμα τότε το κείμενο αυτό πιθανώς δεν περιέχει επιχείρημα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Οι άνθρωποι που κάνουν δίαιτα χάνουν βάρος. Ο Διονύσης δεν κάνει δίαιτα.

Δε χάνει βάρος.

Σε αυτό το παράδειγμα δεν υπάρχει κάποια λέξη που να μας δηλώνει το συμπέρασμα. Από την άλλη είναι φανερό ότι οι τρεις προτάσεις έχουν κάποια σύνδεση μεταξύ τους και πρέπει να αποτελούν ένα επιχείρημα. Για να βρούμε το συμπέρασμα, πρέπει να δούμε ποια είναι η

πρόταση στην οποία υπάρχει το βασικό σημείο του κειμένου. Φαίνεται ότι το βασικό σημείο είναι ότι "ο Διονύσης δεν κάνει δίαιατα". Τότε το επιχείρημα πρέπει να διατυπωθεί ως εξής:

Οι άνθρωποι που κάνουν δίαιτα χάνουν βάρος. Ο Διονύσης δε χάνει βάρος.

Άρα, δεν κάνει δίαιτα.

Θα μπορούσε όμως κάποιος να θεωρήσει ότι το βασικό σημείο είναι ότι "ο Διονύσης δεν έχει χάσει βάρος". Τότε το επιχείρημα πρέπει να διατυπωθεί ως εξής:

Οι άνθρωποι που κάνουν δίαιτα χάνουν βάρος. Ο Διονύσης δεν κάνει δίαιτα.

Άρα, δε χάνει βάρος.

Ποιος είναι ο πιο σωστός τρόπος να διαβάσουμε το κείμενο, αν θέλουμε να έχουμε ένα ορθό επιχείρημα; Παρ' όλο που από πρώτη άποψη δεν είναι εύκολο να αποφασίσουμε, τελικά πρέπει να δεχθούμε ότι το πρώτο επιχείρημα είναι το ορθό. Γιατί, αν ο Διονύσης δε χάνει βάρος, είναι βέβαιο –με βάση την πρώτη προκείμενη– ότι δεν κάνει δίαιτα. Αν όμως ο Διονύσης δεν κάνει δίαιτα δεν είναι αναγκαστικά βέβαιο ότι δε χάνει βάρος. Και τούτο, γιατί υπάρχουν και άλλες αιτίες που κάποιος είναι δυνατό να χάσει βάρος, όπως για παράδειγμα η αρρώστια.

Άσκηση 3

Για κάθε ένα από τα παρακάτω κείμενα να αποφασίσετε (α) αν περιέχουν κάποιο επιχείρημα, και αν ναι, τότε (β) να διακρίνετε ποιο είναι το συμπέρασμα.

Α. Κάθε καλοκαίρι έχουμε κύμα πυρκαγιών στη χώρα μας με μεγάλες καταστροφικές συνέπειες. Η κυβέρνηση πρέπει για φέτος να λάβει από νωρίς μέτρα.

Β. Οι πυρκαγιές είναι ένα συνηθισμένο φαινόμενο στις μεσογειακές χώρες. Η μεγάλη πλειοψηφία τους λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού και έχουν πολλαπλές καταστροφικές συνέπειες.

Γ. Επειδή τα τελευταία χρόνια δεν είχαμε πολλές βροχές και οι υδάτινοι πόροι μειώθηκαν αισθητά, η κυβέρνηση αποφάσισε να επιβάλει περιορισμούς στην ύδρευση.

Δ. Οι κυβερνητικές εκστρατείες κατά του καπνίσματος στηρίζονται στην άποψη ότι ο μεγαλύτερος κίνδυνος για την υγεία από το

κάπνισμα είναι ο κίνδυνος του καρκίνου στον πνεύμονα. Αλλά αυτό δεν είναι σωστό. Είναι βέβαιο ότι οι βαρείς καπνιστές έχουν διπλάσιες πιθανότητες να πεθάνουν από καρδιακά νοσήματα, ενώ η πιθανότητά τους να πεθάνουν από καρκίνο του πνεύμονα δεκαπλασιάζεται. Αλλά πρέπει να σημειώσουμε ότι οι περιπτώσεις θανάτων από καρδιακά είναι κατά πολύ περισσότερες από αυτές του καρκίνου στον πνεύμονα. Έτσι, για κάθε καπνιστή που πεθαίνει από καρκίνο του πνεύμονα υπάρχουν τρεις που πεθαίνουν από καρδιά.

Ε. Στα πρόσφατα χρόνια η ζήτηση για εργαζομένους ειδικούς στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές έχει αυξηθεί. Όλο και περισσότεροι σπουδαστές παίρνουν πτυχία σε αυτές τις ειδικότητες. Όμως πολλές εταιρίες θεωρούν ότι αυτοί οι πτυχιούχοι είναι ανεπαρκείς και χρειάζονται περισσότερη εξάσκηση.

Άσκηση 4

Στην άσκηση αυτή ζητείται να διαλέξετε τις προκείμενες που πράγματι υποστηρίζουν το δεδομένο συμπέρασμα. Δε χρειάζεται να ανησυχείτε κατά πόσο οι προκείμενες είναι αληθείς ή όχι. Η επιλογή σας να γίνει θεωρώντας ότι αν είναι αληθείς υποστηρίζουν το συμπέρασμα.

1. Συμπέρασμα: Οι δωρητές αίματος πρέπει να πληρώνονται.
   (Α) Η υπηρεσία αιμοδοσίας έχει πολλά έξοδα και τα έσοδά της είναι περιορισμένα.
   (Β) Υπάρχει έλλειψη δωρητών αίματος και η αμοιβή θα ενθαρρύνει πολλούς να γίνουν δωρητές.
   (Γ) Οι άνθρωποι που δίνουν αίμα το κάνουν για να βοηθήσουν τους συνανθρώπους τους.
2. Συμπέρασμα: Η χορτοφαγική δίαιτα είναι ευεργετική για την υγεία.
   (Α) Η χορτοφαγία στερεί από τον οργανισμό ορισμένες σημαντικές βιταμίνες. (Β) Η χορτοφαγία αποκλείει τα ζωικά λίπη που είναι βλαβερά.
   (Γ) Η χορτοφαγία δεν εμπεριέχει το ψάρι και το λάδι που είναι ευεργετικά για την υγεία
3. Συμπέρασμα: Η χορτοφαγία δεν είναι ευεργετική για την υγεία.

(Α) Η χορτοφαγία στερεί από τον οργανισμό ορισμένες σημαντικές βιταμίνες.

(Β) Η χορτοφαγία αποκλείει τα ζωικά λίπη που είναι βλαβερά.

(Γ) Η χορτοφαγία δεν εμπεριέχει το ψάρι και το λάδι που είναι ευεργετικά για την υγεία.

4. Συμπέρασμα: Όταν οι εργοδότες επιλέγουν προσωπικό, πρέπει να στηρίζουν την επιλογή τους στην προσωπικότητα των υποψηφίων και όχι στις ικανότητές τους.

(Α) Με τα χρόνια οι προσωπικότητες αλλάζουν και οι ικανότητες εξαφανίζονται.

(Β) Οι ικανότητες εύκολα μπορούν να αποκτηθούν, ενώ οι προσωπικότητες είναι δύσκολο να αλλάξουν.

(Γ) Μερικές ικανότητες δεν μπορούν να αποκτηθούν από τον καθένα, ενώ ο καθένας μπορεί να αναπτύξει μια καλή προσωπικότητα.

2.3 Υποθετικές Προτάσεις

Σε αρκετά επιχειρήματα χρησιμοποιούμε **υποθετικές προτάσεις** ως προκείμενες. Αυτές οι προτάσεις είναι δηλώσεις που αρχίζουν συνήθως με τη λέξη "αν" (ή όταν) και λένε ότι κάτι είναι αληθές ή θα συμβεί, στην περίπτωση που κάτι άλλο είναι αληθές ή συμβαίνει.Για παράδειγμα «αν διαβάζω χωρίς τα γυαλιά μου κουράζονται τα μάτια μου». Μια υποθετική πρόταση δηλώνει τη σύνδεση των δύο απλών προτάσεων από τις οποίες αποτελείται και όχι την αλήθεια ή το ψεύδος τους. Έτσι, την υποθετική πρόταση τη θεωρούμε ως μία ενότητα και επομένως ως μία προκείμενη στο επιχείρημα. Άρα δεν πρέπει να προσπαθούμε να τη χωρίσουμε σε δύο προκείμενες. Πολλές φορές μπερδεύουμε μια υποθετική πρόταση με ένα απλό επιχείρημα που αποτελείται από μια προκείμενη και ένα συμπέρασμα. Αυτό είναι κάτι που πρέπει να το αποφεύγουμε. Ας δούμε πάλι το παραπάνω παράδειγμα:

(Α) Αν διαβάζω χωρίς τα γυαλιά μου, κουράζονται τα μάτια μου.

(Β) Επειδή διαβάζω χωρίς τα γυαλιά μου, κουράζονται τα μάτια μου.

Η πρώτη πρόταση είναι υποθετική που λέει ότι αν συμβαίνει το ένα πράγμα τότε συμβαίνει και το άλλο. Δε μας λέει ότι πράγματι τώρα διαβάζω χωρίς τα γυαλιά μου. Η δεύτερη είναι ένα επιχείρημα που αποτελείται από μια προκείμενη που λέει ότι πράγματι τώρα (ή πάντο-

τε, ή συνήθως) διαβάζω χωρίς τα γυαλιά μου και επομένως κουράζονται τα μάτια μου. Στην πραγματικότητα το (Β) είναι ελλειπτικό επιχείρημα από το οποίο έχει παραλειφθεί μία προκείμενη η οποία είναι η υποθετική πρόταση(Α). Η πλήρης διατύπωση του επιχειρήματος είναι η εξής:

Αν διαβάζω χωρίς τα γυαλιά μου κουράζονται τα μάτια μου (Π)
Διαβάζω χωρίς τα γυαλιά μου (Π)

Κουράζονται τα μάτια μου (Σ)

Άσκηση 5

Ποια από τα παρακάτω είναι υποθετικές προτάσεις και ποια ελλειπτικά επιχειρήματα. Να διατυπώσετε τα τελευταία στην πλήρη μορφή τους.

Α. Όταν τρώω πολύ, βαρυστομαχιάζω.

Β. Έπαιξα ποδόσφαιρο και κουράστηκα.

Γ. Η Μαρία θα αρχίσει δίαιτα, για να χάσει βάρος.

Δ. Όποιος μελετά σκληρά πετυχαίνει στις εξετάσεις.

3. Σύνδεση Προτάσεων σε ένα Επιχείρημα

Έχουμε δει πως κάποιες προτάσεις -οι προκείμενες- συνδέονται με μια άλλη πρόταση –το συμπέρασμα– υποστηρίζοντας το ή επεξηγώντας το. Τώρα θα δούμε πώς οι διάφορες προκείμενες συνδέονται σε ένα επιχείρημα για να υποστηρίξουν το συμπέρασμα.

3.1. Συνδεδεμένες Προκείμενες

Πολύ συχνά η αιτιολόγηση ενός συμπεράσματος περιέχει σύνθετες ιδέες. Έτσι, είναι πιθανό να χρειαστούν πολλές προκείμενες για να εκφράσουν όλες αυτές τις ιδέες, ώστε να υποστηριχθεί το συμπέρασμα. Συνήθως οι προκείμενες δεν είναι ανεξάρτητες προτάσεις, αλλά αιτιο-

λογούν το συμπέρασμα διαμέσου της σύνδεσης μεταξύ τους και της κοινής τους δράσης. Οι προκείμενες αυτές, που σε συνδυασμό μεταξύ τους υποστηρίζουν το συμπέρασμα, λέγονται **συνδεδεμένες προκείμενες.**

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Α. Πρέπει να προστατεύσουμε το φυσικό περιβάλλον της Ελλάδας. (Σ)

Β. Το φυσικό περιβάλλον της Ελλάδας είναι πολύ ωραίο. (Π).

Γ. Ένα ωραίο φυσικό περιβάλλον είναι πηγή έλξης τουρισμού (Π)

Δ. Ο τουρισμός είναι βασικός παράγοντας της ελληνικής οικονομίας. (Π)

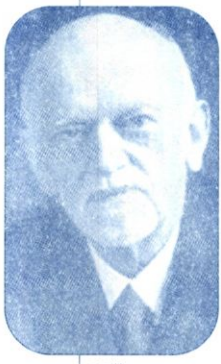
Ε. Κάτι που βοηθάει την οικονομία πρέπει να προστατευθεί (Π)

Σε αυτό το παράδειγμα βλέπουμε ότι καμιά από τις προκείμενες Β,Γ,Δ,Ε δεν υποστηρίζει από μόνη της το συμπέρασμα Α. Έτσι, η πρόταση ότι ο τουρισμός είναι σημαντικός παράγοντας της ελληνικής οικονομίας, με κανένα τρόπο δεν υποστηρίζει το συμπέρασμα. Αυτό γίνεται διαμέσου του συνδυασμού των τεσσάρων προκείμενων. Βλέπουμε ότι το συμπέρασμα συνδέει δύο βασικές έννοιες, της «προστασίας» και του "φυσικού περιβάλλοντος". Η προκείμενη Β λέει ότι το "φυσικό περιβάλλον" της χώρας μας είναι "ωραίο". Η πρόταση Γ συνδέει το "ωραίο φυσικό περιβάλλον" με τον "τουρισμό". Η προκείμενη Δ συνδέει την

Ιστορία 7η — *Ο πιο μελετηρός μαθητής*

Μόνο ένας από τους μαθητές Κώστα, Νίκο και Χάρη είναι μελετηρός. Ο Κώστας είπε τις εξής αληθείς προτάσεις:
α) Αν δεν είμαι εγώ μελετηρός, δεν θα περάσω στα Μαθηματικά.
β) Αν είμαι εγώ μελετηρός, θα περάσω στην Πληροφορική.
Ο Νίκος είπε τις εξής αληθείς προτάσεις:
γ) Αν δεν είμαι εγώ μελετηρός, δεν θα περάσω στην Πληροφορική.
δ) Αν είμαι εγώ μελετηρός θα περάσω στα Μαθηματικά.
Τέλος, ο Χάρης είπε τις εξής αληθείς προτάσεις:
ε) Αν δεν είμαι εγώ μελετηρός, δεν θα περάσω στα Μαθηματικά.
στ) Αν είμαι εγώ μελετηρός θα περάσω στα Μαθηματικά.
Με δεδομένα ότι
1) ο μελετηρός είναι ο μόνος μαθητής που θα περάσει στο ένα μάθημα και
2) ο μελετηρός είναι επίσης επίσης ο μόνος μαθητής που δεν θα περάσει στο ένα μάθημα, βρείτε ποιος από τους τρεις είναι μελετηρός.

έννοια "τουρισμός" με την "οικονομία", και η Ε την "οικονομία" με την ανάγκη "προστασίας". Βλέπουμε λοιπόν ότι η σύνδεση δύο εννοιών σε μια πρόταση, επεκτείνεται σε μια τρίτη έννοια με μια άλλη πρόταση και ούτω καθεξής, μέχρι να συνδεθούν οι έννοιες που υπάρχουν στο συμπέρασμα. Το επιχείρημα αυτό μας δίνει τον οικονομικό λόγο για τον οποίο πρέπει να προστατεύσουμε το φυσικό περιβάλλον. Φυσικά υπάρχουν και άλλοι λόγοι για την προστασία του περιβάλλοντος, οι οποίοι θα μπορούσαν να διατυπωθούν σε ανάλογα επιχειρήματα.



Hilbert

Άσκηση 1

Γράψτε επιχειρήματα που να χρησιμοποιούν συνδεδεμένες προκείμενες και να υποστηρίζουν τα παρακάτω συμπεράσματα.

Α. Η δωρεάν παιδεία ευνοεί την ανάπτυξη της οικονομίας.

Β. Όποιος θέλει την ειρήνη πρέπει να προετοιμάζεται για τον πόλεμο.

Γ. Η καταπολέμηση της ανεργίας βοηθάει στη μείωση της εγκληματικότητας.

3.2 Μη Συνδεδεμένες Προκείμενες

Οι προκείμενες σε ένα επιχείρημα δεν είναι πάντοτε συνδεδεμένες. Τίποτα δε μας εμποδίζει να χρησιμοποιήσουμε ανεξάρτητες μεταξύ τους προκείμενες όπου κάθε μία προσφέρει ένα διαφορετικό λόγο για την υποστήριξη του συμπεράσματος. Ας δούμε το προηγούμενο παράδειγμα:

Α. Πρέπει να προστατεύσουμε το φυσικό περιβάλλον της Ελλάδας. (Σ)

Β. Η προστασία του περιβάλλοντος βελτιώνει την ποιότητα της ζωής. (Π)

Γ. Η προστασία του περιβάλλοντος βοηθά την οικονομία της χώρας. (Π)

Δ. Η προστασία του περιβάλλοντος διατηρεί την ποικιλία των οικοσυστημάτων. (Π).

Βλέπουμε ότι οι τρεις προκείμενες υποστηρίζουν το συμπέρασμα ανεξάρτητα η μία από την άλλη δίνοντας κάθε μια ένα διαφορετικό λόγο. Είναι εύκολο να βρούμε μη συνδεδεμένες προκείμενες επειδή μπορού-

με γρήγορα να σκεφτούμε διαφορετικούς λόγους για το συμπέρασμά μας. Αλλά οι μη συνδεδεμένες προκείμενες που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο δεν υποστηρίζουν ισχυρά το συμπέρασμα. Και τούτο, γιατί αυτό που νομίζουμε ότι είναι μια μη συνδεδεμένη προκείμενη στην πραγματικότητα είναι δύο ή περισσότερες συνδεδεμένες προκείμενες ορισμένες από τις οποίες σιωπηρά παραλείπονται. Έτσι, η προκείμενη Γ στο παράδειγμά μας, για να υποστηρίξει λογικά το συμπέρασμα, πρέπει να συνδυαστεί με την παρακάτω προκείμενη Ε η οποία έχει αποσιωπηθεί: «Η προστασία του περιβάλλοντος ευνοεί τον τουρισμό».

Άσκηση 2

Να βρείτε με ποιες άλλες προτάσεις θα μπορούσαν να συνδυαστούν οι προκείμενες Β και Δ του παραπάνω παραδειγματος, ώστε να υποστηρίξουν καλύτερα το συμπέρασμα Α.

3.3 Σχηματικός Τρόπος Παρουσίασης ενός Επιχειρήματος

Όταν γράφουμε ένα επιχείρημα, είναι καλό να ξεχωρίζουμε το συμπέρασμα από τις προκείμενες, και ακόμα κάθε προκείμενη να διατυπώνεται ξεχωριστά σε διαφορετικές προτάσεις. Έτσι, μπορούμε να δούμε καλύτερα τη λογική σειρά με την οποία οι προκείμενες υποστηρίζουν το συμπέρασμα. Ακόμα και έτσι όμως, σε επιχειρήματα με πολλές προκείμενες είναι δύσκολο να διακρίνουμε τον τρόπο με τον οποίο συνδυαζόμενες οι προκείμενες υποστηρίζουν το συμπέρασμα. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αν παραστήσουμε σχηματικά το επιχείρημα. Με αυτό τον τρόπο είμαστε ικανοί να διατυπώνουμε σαφέστερα και με τη σωστή λογική σειρά τις σκέψεις μας. Ας δούμε πάλι ένα παράδειγμα:

Α. Πρέπει να προστατεύσουμε το φυσικό περιβάλλον της Ελλάδας. (Σ).

Β. Η προστασία του περιβάλλοντος βελτιώνει την ποιοτητα της ζωής. (Π)

Γ. Η προστασία του περιβάλλοντος βοηθά την οικονομία της χώρας. (Π)

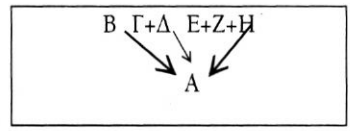
Δ. Η προστασία του περιβάλλοντος ευνοεί τον τουρισμό (Π)

Ε. Η προστασία του περιβάλλοντος διατηρεί την ποικιλία των οικοσυστημάτων. (Π)

Ζ. Όπου υπάρχει μεγαλύτερη ποικιλία έμβιας ζωής, εκεί έχουμε και σταθερότερα οικοσυστήματα. (Π)

Η. Η καταστροφή της ισορροπίας των οικοσυστημάτων της γης θα κάνει δυσκολότερη ή και αδύνατη τη ζωή των ανθρώπων πάνω στη γη. (Π)

Σε αυτό το επιχείρημα, το συμπέρασμα υποστηρίζεται από έξι προκείμενες. Από αυτές, η προκείμενη Β είναι μη συνδεδεμένη και οι άλλες πέντε συνδεδεμένες. Από αυτές οι Γ και Δ δίνουν από κοινού ένα λόγο για το συμπέρασμα και το ίδιο κάνουν από κοινού οι Ε, Ζ και Η. Αυτό όμως δε φαίνεται αμέσως έτσι όπως είναι καταγραμμένες οι προκείμενες. Αν όμως παρουσιάσουμε το επιχείρημα σχηματικά, όπως παρακάτω, τότε καταλαβαίνουμε αμέσως τις σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες προτάσεις:



Τώρα φαίνεται καθαρά ότι υπάρχουν τρεις λόγοι που δίδονται για το συμπέρασμα Α και οι οποίοι εκφράζονται με έξι προκείμενες, καθώς και ποιες προκείμενες συνδυάζονται μεταξύ τους για να υποστηρίξουν το συμπέρασμα.

3.4. Σύνθετα Επιχειρήματα

Πολλές φορές σε ένα επιχείρημα μία (ή κάποιες) από τις προκείμενες δεν είναι βέβαιο ότι είναι αληθής και χρειάζεται ένα άλλο επιχείρημα που να την υποστηρίζει. Έτσι, η προκείμενη αυτή παρουσιάζεται ως ένα ενδιάμεσο συμπέρασμα ενός άλλου επιχειρήματος και το βασικό επιχείρημα υποστηρίζεται από ένα ή πολλά υποεπιχειρήματα. Αυτό μπορεί να συνεχιστεί και να έχουμε μια ολόκληρη σειρά από επιχειρήματα που το καθένα να υποστηρίζει προκείμενες του άλλου. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

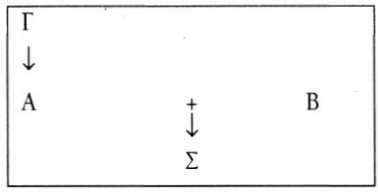
Η πλειοψηφία των μελλοντικών γονέων, κυρίως σε παραδοσιακές κοινωνίες, προτιμά να έχει αγόρια παρά κορίτσια. Έτσι, αν μπορούν οι γονείς να διαλέγουν το φύλο του παιδιού τους, τότε πιθανότατα θα υ-

πάρξουν περισσότερα αγόρια από κορίτσια. Αυτή η πλειοψηφία των αρσενικών στο συνολικό πληθυσμό είνα λογικό να προκαλέσει σημαντικά κοινωνικά προβλήματα. Επομένως, θα πρέπει να αποθαρρύνουμε τη χρήση τεχνικών επιλογής φύλου.

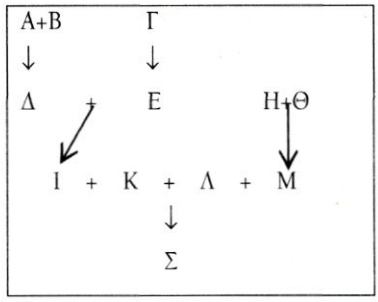
Το κύριο συμπέρασμα [Σ] σε αυτό το επιχείρημα είναι το εξής: «Πρέπει να αποθαρρύνουμε τη χρήση τεχνικών επιλογής φύλου»Το συμπέρασμα αυτό υποστηρίζεται από δύο προκείμενες: «Αν μπορούν οι γονείς να διαλέγουν το φύλο του παιδιού τους, τότε πιθανότατα θα υπάρξουν περισσότερα αγόρια από κορίτσια» [Α], και «η πλειψηφία των αρσενικών στο συνολικό πληθυσμό είναι λογικό να προκαλέσει σημαντικά κοινωνικά προβλήματα»[Β].

Η πρώτη από τις δύο παραπάνω προκείμενες υποστηρίζεται από ένα επιχείρημα με την εξής μία προκείμενη: «Η πλειοψηφία των μελλοντικών γονέων, κυρίως στις παραδοσιακές κοινωνίες, προτιμά να έχει αγόρια παρά κορίτσια»[Γ].

Μπορούμε να παραστήσουμε σχηματικά το επιχείρημα ως εξής:



Φυσικά είναι δυνατό να έχουμε πολύ πιο πολύπλοκες περιπτώσεις, όπως η παρακάτω:



Ασκηση 3

Για κάθε ένα από τα παρακάτω επιχειρήματα, να διακρίνετε το κυρίως συμπέρασμα και τις προκείμενες, καθώς και αν υπάρχουν εν-

διάμεσα συμπεράσματα. Να παρουσιάσετε με σχηματικό τρόπο τα επιχειρήματα.

Α. Αυτοί που καπνίζουν σε δημόσιους χώρους επιβάλλουν στους άλλους να γίνονται παθητικοί καπνιστές. Έτσι, οι καπνιστές θέτουν σε κίνδυνο την υγεία των μη καπνιστών, γιατί έχει αποδειχθεί ότι ακόμα και το παθητικό κάπνισμα προκαλεί καρκίνο. Πρέπει λοιπόν να απαγορευθεί το κάπνισμα σε δημόσιους χώρους.

Β. Η δημοκρατικά εκλεγμένη κυβέρνηση ενός κράτους είναι αυτή που μπορεί καλύτερα να εξασφαλίσει τα συμφέροντα των πολιτών. Κάτι που είναι πολύ σημαντικό για το μέλλον μιας κοινωνίας πρέπει να ελέγχεται και να χρηματοδοτείται από την κυβέρνηση. Η παιδεία είναι κάτι το πολύ σημαντικό για το μέλλον της κοινωνίας. Πρέπει λοιπόν το εκπαιδευτικο μας σύστημα να ελέγχεται και να χρηματοδοτείται από την κυβέρνηση.

Γ. Τα τελευταία πέντε χρόνια υπάρχει σε εξέλιξη ένα εκτεταμένο πρόγραμμα σχολικού αθλητισμού που έχει αυξήσει κατά πολύ τον αριθμό των αθλητών. Έχουν βελτιωθεί πολύ οι αθλητικές εγκαταστάσεις και τα κίνητρα για όσους κάνουν πρωταθλητισμό, ώστε οι αθλητές μας να προετοιμάζονται καλύτερα και να έχουν μεγαλύτερες δυνατότητες για διεθνείς διακρίσεις. Άρα, οι έλληνες αθλητές είναι πιθανό να κερδίσουν περισσότερα μετάλλια στους επόμενους ολυμπιακούς αγώνες

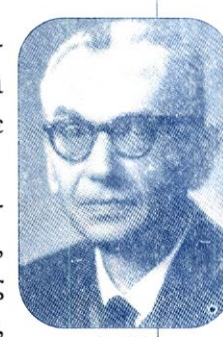
4. Είδη Απλών Επιχειρημάτων

4.1. Επιχείρημα Διαμέσου Παραδειγμάτων

Έχουμε ήδη δει ότι πολλά επιχειρήματα χρησιμοποιούν ως προκείμενες γενικές προτάσεις που ισχύουν για μιαν ολόκληρη κατηγορία πραγμάτων, όπως «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί», «σε παλαιότερες εποχές τα παιδιά συνήθιζαν να κάνουν το επάγγελμα των πατεράδων τους» κτλ. Πώς όμως φτάνουμε να διατυπώνουμε μια γενική πρόταση; Για να υποστηρίξουμε μια γενική πρόταση, χρησιμοποιούμε επιχειρήματα διαμέσου παραδειγμάτων που ονομάζονται και επαγωγικά. Η γε-

νική μορφή ενός τέτοιου επιχειρήματος είναι η εξής:

Ειδικές περιπτώσεις χ μιας γενικής κατηγορίας Χ δείχνουν μια κοινή ιδιότητα Α. Άρα, γενικεύοντας, προσδοκούμε ότι και οι άλλες περιπτώσεις της κατηγορίας Χ θα έχουν την ιδιότητα Α.


Godel

Ας δούμε ένα παράδειγμα: Έχουμε πλήθος πληροφοριών που αφορούν πολλές αρχαίες ελληνικές πόλεις, και που όλες πιστοποιούν ότι οι γυναίκες δεν είχαν πολιτικά δικαιώματα. Έτσι γενικεύουμε και λέμε ότι «στην αρχαία Ελλάδα οι γυναίκες δεν είχαν πολιτικά δικαιώματα».

Η γενίκευση είναι μια αρκετά επικίνδυνη υπόθεση. Ποτέ δεν μπορούμε να είμαστε απολύτως βέβαιοι ότι όλες οι περιπτώσεις είναι έτσι, ακόμα και αν δε γνωρίζουμε καμιά περίπτωση στην οποία η γενική μας πρόταση να μην είναι αληθής. Σε σχέση με το προηγούμενο παράδειγμα, υποθέστε ότι μελλοντικές αρχαιολογικές ανακαλύψεις φέρνουν στο φως μια επιγραφή που πιστοποιεί ότι σε μια αρχαία ελληνική πόλη οι γυναίκες είχαν πολιτικά δικαιώματα. Αμέσως, η αλήθεια της παραπάνω γενικής πρότασης καταρρίπτεται. Όταν λοιπον διατυπώνουμε γενικές προτάσεις, το πρώτο πράγμα που πρέπει να προσέχουμε είναι να μην είναι δυνατόν να βρούμε **αντιπαραδείγματα**, δηλαδή περιπτώσεις για τις οποίες η πρότασή μας δεν ισχύει. Επιπλέον τα παραδείγματα που θα φέρουμε για να υποστηρίξουμε τη γενική πρόταση πρέπει να είναι όσο το δυνατόν **περισσότερα και αντιπροσωπευτικά.**

Υποθέστε ότι πήγατε μια εκδρομή μερικών ημερών στη Γερμανία και στην επιστροφή σας δηλώσατε στους φίλους σας ότι «το γερμανικό φαγητό είναι απαίσιο». Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξατε από σχετικά λίγες εμπειρίες δεν είναι ισχυρό. Αν είχατε ζήσει στη Γερμανία για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και, επομένως, είχατε περισσότερες εμπειρίες από το γερμανικό φαγητό, τότε το συμπέρασμά σας θα ήταν ισχυρότερο και η αλήθεια του πιο πιθανή. Αλλά ακόμα και τότε έπρεπε οι εμπειρίες σας να είναι πιο αντιπροσωπευτικές. Γιατί μπορεί στην πόλη που εσείς μένατε το φαγητό να ήταν απαίσιο, αλλά άλλες περιοχές της Γερμανίας να είναι φημισμένες για το καλό φαγητό τους.

Σήμερα χρησιμοποιούμε πάρα πολύ τις στατιστικές, για να διατυπώσουμε κάποιες θέσεις. Σχεδόν καθημερινά μας πληροφορούν ότι η τάδε δημοσκόπηση έδειξε αυτό, η άλλη κάτι άλλο κτλ. Με τη στατιστική, αφού εξετάσουμε μια ολόκληρη σειρά περιπτώσεων, καταλήγουμε σε μια γενική πρόταση. Δεν είναι όμως τα αποτελέσματα κάθε στατιστικής αξιόπιστα. Για να είναι τα αποτελέσματα μιας στατιστικής αξιόπιστα, πρέπει αυτή να γίνεται χωρίς προκατάληψη (σκεφθείτε τη

στατιστική κάποιας καπνοβιομηχανίας που θέλει να δείξει ότι το κάπνισμα δεν είναι βλαβερό στην υγεία) και με βάση τους κανόνες αυτής της επιστήμης. Ας φέρουμε ένα άλλο παράδειγμα: Υποθέστε ότι στην πολυκατοικία που μένετε όλοι σχεδόν οι ένοικοι είναι διατεθειμένοι να ψηφίσουν τον κ. Χ για δήμαρχο της πόλης σας. Από αυτό γενικεύετε και λέτε ότι «είναι βέβαιο ότι ο κ. Χ θα βγει δήμαρχος». Το επιχείρημα αυτό είναι πολύ ασθενές για δύο λόγους. Πρώτα, γιατί ο αριθμός των ατόμων που γνωρίζετε ότι θα ψηφίσουν τον κ. Χ είναι πολύ μικρός στο σύνολο του πληθυσμού, και ακόμη γιατί το δείγμα των ατόμων δεν είναι αντιπροσωπευτικο επειδή προέρχεται μόνο από μια πολυκατοικία. Μια πιο σωστή γενίκευση θα ήταν η εξής: «Σε δείγμα 500 ατόμων επί πληθυσμού 10.000 ψηφοφόρων του Δήμου Α, όπου το δείγμα αυτό ήταν αντιπροσωπευτικό του συνολικού πληθυσμού σε σχέση με το φύλο, την περιοχή κατοικίας το επάγγελμα και την ηλικία, βρέθηκε ότι το 70%προτίθεται να ψηφίσει για δήμαρχο τον κ. Χ. Άρα, είναι σχεδόν βέβαιο ότι ο κ. Χ θα εκλεγεί δήμαρχος».

Οι γενικές προτάσεις, που κατά κανόνα προέρχονται από στατιστικές, πειράματα ή άλλα επιχειρήματα διαμέσου παραδειγμάτων είναι σημαντικό εργαλείο με την έννοια ότι μπορούν στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν ως προκείμενες σε επιχειρήματα

Άσκηση 1

Να διαμορφώσετε επιχειρήματα διαμέσου παραδειγμάτων, για να υποστηρίξετε τα παρακάτω συμπεράσματα:

(α) Η δουλεία ήταν ένας θεσμός καθολικά αποδεκτός στις αρχαίες κοινωνίες.

(β) Ο υπουργός κ. Χ είναι ο δημοφιλέστερος έλληνας πολιτικός.

(γ) Οι Αγγλοι είναι λαός προσκολλημένος στις παραδόσεις του.

4.2. Επιχείρημα Διαμέσου Αναλογίας

Στα επιχειρήματα διαμέσου αναλογίας αυτό που κάνουμε είναι να συμπεραίνουμε κάτι για μια ειδική περίπτωση από μια άλλη ειδική περίπτωση που έχει ίδια χαρακτηριστικά με τη δική μας. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Η καλή λειτουργία των μηχανών οφείλεται στο ότι τα διάφορα εξαρτήματά τους συνεργάζονται απόλυτα μεταξύ τους.

Οι υπάλληλοι μιας εταιρείας είναι όπως τα εξαρτήματα μιας μηχανής.

Άρα, για να λειτουργεί σωστά η εταιρεία πρέπει οι υπάλληλοί της να συνεργάζονται όσο το δυνατόν καλύτερα μεταξύ τους.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ένα τυπικό επιχείρημα διαμέσου αναλογίας έχει δύο προκείμενες. Η μία μας λέει τι γίνεται σε μια ειδική περίπτωση ενός πράγματος (για παράδειγμα, μηχανές). Η άλλη δηλώνει την αναλογία ανάμεσα σε αυτό το πράγμα και κάποιο άλλο (για παράδειγμα, υπάλληλοι μιας εταιρείας). Φυσικά η πιο προβληματική πρόταση είναι αυτή που δηλώνει την αναλογία και κανονικά πρέπει να συνοδεύεται από ένα επιχείρημα που να την υποστηρίζει. Επιπλέον, η αναλογία πρέπει να αφορά στη συγκεκριμένη άποψη από την οποία βλέπουμε το συγκεκριμένο πράγμα. Για παράδειγμα:

Έστω ότι για να ανάψουμε φωτιά στο τζάκι χρησιμοποιούμε υγρή παραφίνη. Ας υποθέσουμε ότι κάποια μέρα μας τέλειωσε η υγρή παραφίνη και κάνουμε τον παρακάτω συλλογισμό:

Η υγρή παραφίνη με βοηθά να ανάψω το τζάκι.

Το οινόπνευμα είναι παρόμοιο με την υγρή παραφίνη (γιατί είναι και τα δύο εύφλεκτα).

Μπορώ να χρησιμοποιήσω οινόπνευμα για να ανάψω το τζάκι.

Η αναλογία εδώ είναι ισχυρή, γιατί πράγματι τα δύο πράγματα (υγρή παραφίνη και οινόπνευμα) είναι παρόμοια ως προς το συγκεκριμένο σκοπό για τον οποίο τα θέλουμε. Ας δούμε μια παραλλαγή του παραπάνω παραδείγματος:

Το (καθαρό) οινόπνευμα με βοηθά να ανάψω το τζάκι.

Το νερό είναι παρόμοιο με το οινόπνευμα (γιατί είναι και τα δύο διαφανή υγρά).

Άρα, μπορώ να χρησιμοποιήσω νερό για να ανάψω το τζάκι.

Το επιχείρημα αυτό δεν είναι ορθό, γιατί η ομοιότητα ανάμεσα στα δύο πράγματα αφορά σε χαρακτηριστικά τα οποία δεν είναι ουσιώδη για το σκοπό μας.

Άσκηση 2

Χρησιμοποιήστε τις παρακάτω αναλογίες, για να διατυπώσετε αναλογικά επιχειρήματα:

(α) Έμβιος οργανισμός - κοινωνία
(β) Κυβερνήτης πλοίου - πρωθυπουργός
(γ) Τυφλός - αμόρφωτος
(δ) Διαστημόπλοιο - πλανήτης γη

4.3 Επιχείρημα που χρησιμοποιεί Αιτία και Αποτέλεσμα

Η επιχειρηματολογία διαμέσου αιτιών είναι κάτι πολύ συνηθισμένο στην καθημερινή μας ζωή. Αν κάποιος σας ρωτήσει «γιατί πήγατε στον κινηματογράφο να δείτε αυτό το έργο;», πρέπει η απάντησή σας να εξηγήσει τους λόγους ή τις αιτίες που σας οδήγησαν να κάνετε τη συγκεκριμένη πράξη.

Έτσι, θα μπορούσατε να απαντήσετε «γιατί διάβασα μια καλή κριτική γι'αυτό το έργο» ή «γιατί μου το σύστησε ένας φίλος μου» κτλ. Άρα, βλέπουμε ότι υπάρχει σχέση αιτίας και αποτελέσματος ανάμεσα στις δύο προτάσεις.

Η προκείμενη μας δίνει την αιτία και το συμπέρασμα το αποτέλεσμα.

Οι αιτίες εξηγούν γιατί ένα γεγονός συνέβηκε (ή συμβαίνει). Οι αιτίες που εξηγούν φυσικά γεγονότα λέγονται φυσικές αιτίες και οι αιτίες που εξηγούν ανθρώπινες πράξεις (γεγονότα τα οποία οφείλονται στην ανθρώπινη δραστηριότητα και εξαρτώνται από την ανθρώπινη βούληση) λέγονται τελικές αιτίες. Για παράδειγμα, όταν λέμε ότι «είχαμε έκλειψη ηλίου, επειδή η σελήνη βρέθηκε ανάμεσα στη γη και στον ήλιο», προκείμενη («η σελήνη βρέθηκε...») είναι η φυσική αιτία για το συμπέρασμα («είχαμε έκκλειψη ηλίου»). Από την άλλη, όταν λέμε ότι «ο Σωκράτης θανατώθηκε επειδή αρνήθηκε να δραπετεύσει από τη φυλακή», η αιτία είναι τελική γιατί σχετίζεται με τη βούληση του Σωκράτη.

Επιχειρήματα με αιτίες είναι πολύ συνηθισμένα στις κοινωνικές και φυσικές επιστήμες. Αρκετά συχνά γνωρίζουμε το αποτέλεσμα και ψάχνουμε να βρούμε ποιες αιτίες προκάλεσαν το γεγονός αυτό. Έτσι, δίνουμε μιαν εξήγηση ή αιτιλόγηση γι' αυτό το γεγονός.

Όταν λέμε ότι το Α είναι αιτία του Β, εννοούμε όχι μόνο ότι το Α και το Β σχετίζονται κατά κάποιο τρόπο μεταξύ τους, αλλά ότι το Α είναι αυτό που **προκαλεί το Β**. Υπάρχουν γεγονότα που σχετίζονται μεταξύ τους ή που όταν εμφανίζεται το ένα τότε εμφανίζεται και το άλλο, χωρίς το ένα να είναι αιτία του άλλου. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

«Ο κύριος Χ κάθε πρωί που πάει στο γραφείο του παραγγέλει καφέ». Εδώ έχουμε δύο γεγονότα που σχετίζονται μεταξύ τους και που όταν συμβαίνει το ένα συμβαίνει και το άλλο. Είναι όμως λάθος να πούμε ότι η αιτία που ο κύριος Χ πηγαίνει στο γραφείο του είναι για να πιει καφέ. Η συσχέτιση ανάμεσα στα δύο γεγονότα είναι συμπτωματική. Έτσι, ένα επιχείρημα είναι πιο ισχυρό, όταν μαζί με τις αιτίες μας εξηγεί και με ποιο τρόπο η αιτία προκαλεί το αποτέλεσμα. Στο επιχείρημα «οι τροφές με πολλά λιπαρά είναι υπεύθυνες για μεγάλο αριθμό καρδιακών παθήσεων» η σύνδεση αιτίας – αποτελέσματος δεν είναι φανερή και εύλογα μπορεί να αμφισβητηθεί. Για να είναι ισχυρό, πρέπει να εξηγήσουμε πώς η αιτία προκαλεί το αποτέλεσμα και να το διατυπώσουμε ως εξής: «Οι τροφές με πολλά λιπαρά περιέχουν χοληστερίνη ή οποία έχει την τάση να παράγει θρόμβους στο αίμα. Γι' αυτό και είναι υπεύθυνες για μεγάλο αριθμό καρδιακών παθήσεων».

Τα περισσότερα γεγονότα έχουν **πολλές αιτίες** και όχι μόνο μία. Το να βρούμε λοιπόν μόνο μία από όλες τις πιθανές αιτίες δεν είναι αρκετό. Ακόμα μερικές αιτίες είναι **πιο σημαντικές** από άλλες. Πρέπει λοιπόν να είμαστε πολύ προσεκτικοί, να εξετάζουμε ένα γεγονός από όλες τις πιθανές απόψεις και να προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τι είναι σημαντικό και τι όχι γι' αυτό που θέλουμε να δείξουμε ή να εξηγήσουμε. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να εξηγήσουμε γιατί πολλοί νέοι σήμερα οδηγούνται στα ναρκωτικά, πρέπει να είμαστε έτοιμοι να ψάξουμε για πολλές αιτίες, εξετάζοντας το θέμα μας από πολλές απόψεις. Έτσι, πρέπει να εξετάσουμε το θέμα μας από άποψη ψυχολογική, κοινωνική, από την πλευρά της οικογένειας, του σχολείου, της μελλοντικής δυνατότητας για εργασία, των διάφορων προτύπων και αξιών κτλ. Ανάλογα με την άποψη από την οποία εξετάζουμε το θέμα μας βρίσκουμε και διάφορες αιτίες, που άλλες είναι περισσότερο σημαντικές και άλλες όχι. Ένας κανόνας για να βρίσκουμε τις αιτίες γεγονότων είναι να ψάχνουμε για ομοιότητες ανάμεσα σε μια σειρά όμοιων περιπτώσεων.

Άσκηση 3

Να διατυπώσετε τις αιτίες των παρακάτω αποτελεσμάτων, εξηγώντας συγχρόνως και το πώς η αιτία συνδέεται με το αποτέλεσμα. Να έχετε υπόψη ότι συχνά είναι δυνατό να υπάρχουν πολλές αιτίες.

(α) Το νερό βράζει στην κατσαρόλα.

(β) Το ποσοστό θανάτων από τροχαία ατυχήματα είναι πολύ υψηλό στην Ελλάδα.

(γ) Τα αγγλικά έχουν γίνει πλέον η διεθνής γλώσσα.

4.4 Παραγωγικά Επιχειρήματα

Τα επιχειρήματα που εξετάσαμε έως τώρα έχουν ένα σχετικά αβέβαιο και πιθανοκρατικό χαρακτήρα. Σπάνια είμαστε βέβαιοι ότι οι αναλογίες που χρησιμοποιούμε είναι απόλυτα ακριβείς, ή ότι βρήκαμε όλες τις αιτίες ή ακόμα ότι τα παραδείγματά μας είναι αντιπροσωπευτικά και ότι δεν υπάρχουν αλλά παραδείγματα που έρχονται σε αντίθεση με το επιχείρημά μας. Στα παραγωγικά όμως επιχειρήματα, με τα οποία ασχολήθηκαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, όταν αυτά έχουν σχηματιστεί σωστά και οι προκείμενες είναι αληθείς, τότε **είναι βέβαιο** ότι και το συμπέρασμα είναι αληθές. Έχουμε ήδη δει σε προηγούμενο κεφάλαιο το παρακάτω επιχείρημα (συλλογισμό):

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος

Ο Σωκράτης είναι θνητός

Αν στο επιχείρημα αυτό οι προκείμενες είναι πράγματι αληθείς, τότε είναι απόλυτα βέβαιο ότι και το συμπέρασμα είναι αληθές. Και τούτο γιατί οι έννοιες "θνητός", "άνθρωπος" και "Σωκράτης" βρίσκονται σε τέτοια σχέση (κάθε μία υπάγεται στην προηγούμενή της) μεταξύ τους, ώστε να διασφαλίζεται ότι το συμπέρασμα πράγματι εξάγεται σωστά από τις προκείμενες. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι η **μορφή** ή το **σχήμα** του παραγωγικού επιχειρήματος μας εγγυάται τη σωστή εξαγωγή του συμπεράσματος. Ένα παραγωγικό επιχείρημα που έχει σωστή μορφή –ή είναι ορθά σχηματισμένο– λέγεται έγκυρο. Αν τώρα σε αυτό το επιχείρημα τυχαίνει και οι προκείμενές του να είναι αληθείς, τότε είναι αληθές και το συμπέρασμά του.

Μπορούμε λοιπόν να διακρίνουμε σχήματα ή μορφές έγκυρων παραγωγικών επιχειρημάτων. Το σχήμα του παραπάνω επιχειρήματος είναι το εξής:

Όλα τα Χ είναι Υ
Το Ζ είναι Υ

Άρα το Ζ είναι Χ

Στο δεύτερο κεφάλαιο είδαμε τα σημαντικότερα σχήματα έγκυρων παραγωγικών επιχειρημάτων (Modus Ponens, Modus Tollens, υποθετικός συλλογισμός, διαζευκτικός συλλογισμός, απαγωγή σε άτοπο κτλ.). Ας δούμε τους τύπους και από ένα παράδειγμα από τα πιο συνηθισμένα παραγωγικά επιχειρήματα, τον Modus Ponens και τον Modus Tollens:

• **Modus Ponens**	Αν ρ, τότε σ
(νόμος αποσπάσεως)	(Ισχύει) ρ
	Άρα (ισχύει) σ

Παράδειγμα:

Αν οι αθλητές μας προετοιμαστούν πολύ καλά για τους ολυμπιακούς αγώνες, τότε είναι πιθανό ότι θα κερδίσουν μετάλλια.

Οι αθλητές μας έχουν προετοιμαστεί πολύ καλά για τους ολυμπιακούς αγώνες.

Είναι πιθανό να κερδίσουν μετάλλια.

• **Modus Tollens**	Αν ρ, τότε σ
(συλλογισμός αρνητικής μορφής)	(Ισχύει) όχι σ
	Άρα (ισχύει) όχι ρ

Παράδειγμα

Αν κάποιος αθλείται, είναι υγιής.

Ο Πέτρος δεν είναι υγιής.

Ο Πέτρος δεν αθλείται.

Στα παραγωγικά επιχειρήματα (συλλογισμοί, modus ponens, modus tollens, κτλ.) πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να ακολουθούμε ακριβώς τον τύπο του έγκυρου επιχειρήματος. Για παράδειγμα:

ΟΧΙ	**ΝΑΙ**
Αν κάποιος αθλείται, είναι υγιής,	Αν κάποιος αθλείται, είναι υγιής.
Ο Πέτρος είναι υγιής.	Ο Πέτρος αθλείται.
Ο Πέτρος αθλείται	Ο Πέτρος είναι υγιής.
ΟΧΙ	**ΝΑΙ**
Ο καλός μαθητής είναι εργατικός	Ο καλός μαθητής είναι εργατικός
Ο Νίκος δεν είναι καλός μαθητής	Ο Νίκος δεν είναι εργατικός
Ο Νίκος δεν είναι εργατικός	Ο Νίκος δεν είναι καλός μαθητής

Κατά κανόνα, σε αυτούς τους τύπους των επιχειρημάτων χρησιμοποιούμε μια γενική πρόταση που μας λέει ότι ένα σύνολο περιπτώσεων χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα Χ. Επομένως, αν μια ατομική περίπτωση

ανήκει σε αυτό το σύνολο, τότε έχει την ιδιότητα Χ. Ο παραγωγικός τρόπος συλλογισμού είναι πολύ συνηθισμένος στις επιστήμες. Στην ιατρική, για παράδειγμα, ο γιατρός γνωρίζει ότι τα συμπτώματα της γρίπης είναι τα φ, χ, ψ, κτλ. Αν κάποιος ασθενής έχει αυτά τα συμπτώματα τότε ο γιατρός αποφαίνεται ότι έχει γρίπη και δίνει την κατάλληλη θεραπεία.

Quine

Τα παραγωγικά επιχειρήματα είναι πολύ σημαντικά, γιατί, αν είναι έγκυρα (αν ακολουθήσουμε σωστά τους γνωστούς τύπους), γνωρίζουμε ότι η αλήθεια ή βεβαιότητα του συμπεράσματος εξαρτάται μόνο από την αλήθεια ή τη βεβαιότητα των προκείμενων και όχι αν ξεχάσαμε κάποια προκείμενη ή αν βρήκαμε όλες τις περιπτώσεις κτλ. Βέβαια στην κοινή γλώσσα και την καθημερινή ζωή σπάνια είμαστε βέβαιοι για την αλήθεια των προκείμενων των επιχειρημάτων μας. Η αβεβαιότητα αυτή μεταφέρεται και στο συμπέρασμα. Παρ' όλα αυτά, όμως, όταν μπορούμε να βρούμε αξιόπιστες προκείμενες, τότε τα παραγωγικά επιχειρήματα είναι πολύ χρήσιμα. Ακόμα και όταν δεν έχουμε βέβαιες προκείμενες, η χρήση παραγωγικών επιχειρημάτων –σε σύνθετα κυρίως επιχειρήματα– είναι σημαντική, γιατί, αν κάποιο συμπέρασμα δεν φαίνεται σωστό, πρέπει να αναζητήσουμε το λάθος σε κάποια από τις αρχικές μόνο προκείμενες και όχι στον τύπο του επιχειρήματος ή σε όσες προέκυψαν ως συμπεράσματα προηγούμενων επιχειρημάτων. Επιπλέον, οι παραγωγικοί τύποι μας δίνουν έναν πολύ καλό τρόπο οργάνωσης της σκέψης μας σε ένα διάλογο με άλλους ή σε ένα κείμενο που γράφουμε.

Άσκηση 4

Ποια από τα παρακάτω επιχειρήματα είναι έγκυρα και ποια όχι; Διατυπώστε τα μη έγκυρα επιχειρήματα με τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνουν έγκυρα.

(α) Αν κάποιος καπνίζει, κινδυνεύει από καρκίνο του πνεύμονα. Ο Γιάννης δεν καπνίζει. Άρα, δεν κινδυνεύει από καρκίνο του πνεύμονα.

(β) Όταν βρέχει, παίρνω την ομπρέλα μου. Πήρα μαζί μου την ομπρέλα μου. Άρα βρέχει.

(γ) Όταν βρέχει, υπάρχουν σύννεφα. Δεν υπάρχουν σύννεφα. Δεν βρέχει.

(δ) Όταν βρέχει, υπάρχουν σύννεφα. Υπάρχουν σύννεφα. Βρέχει.

(ε) Οι επιστήμονες χαίρουν εκτίμησης στην κοινωνία. Ο Κώστας χαίρει εκτίμησης στην κοινωνία. Ο Κώστας είναι επιστήμονας.

ζ) Όλοι οι αθλητές της ομάδας Χ προπονούνται καθημερινά. Μερικοί μαθητές του σχολείου μας ανήκουν στην ομάδα Χ. Άρα, μερικοί μαθητές του σχολείου μας προπονούνται καθημερινά.
(η) Μερικοί Έλληνες είναι αναλφάβητοι. Οι Πειραιώτες είναι Έλληνες. Άρα, μερικοί Πειραιώτες είναι αναλφάβητοι.
(θ) Κανείς Ιταλός δεν είναι Έλληνας. Μερικοί Λονδρέζοι είναι Έλληνες. Άρα, μερικοί Λονδρέζοι είναι Ιταλοί.

5. Μερικοί Τρόποι Ελέγχου των Προκείμενων

Υπάρχουν δύο τρόποι για να ανασκευάσουμε ένα επιχείρημα. Ο πρώτος είναι να δούμε αν το επιχείρημα είναι σωστά δομημένο και αν πράγματι το συμπέρασμα εξάγεται από τις προκείμενες. Για τα είδη και τους τύπους των επιχειρημάτων μιλήσαμε στα προηγούμενα. Ο δεύτερος τρόπος είναι να ελέγξουμε κατά πόσον οι προκείμενες μπορούν να θεωρηθούν αληθείς ή όχι. Σε αυτή την ενότητα θα δούμε μερικούς τρόπους, για να ελέγχουμε την αξιοπιστία των προκείμενων. Όπως ήδη είπαμε στην τρίτη ενότητα, πολλές φορές έχουμε σύνθετα επιχειρήματα όπου μια προκείμενη μπορεί να είναι συμπέρασμα ενός άλλου προηγούμενου επιχειρήματος. Πάντοτε όμως φθάνουμε σε ένα σημείο όπου κάποιες αρχικές προκείμενες τις λαμβάνουμε και τις δεχόμαστε χωρίς να υποστηρίζονται από κάποιο επιχείρημα. Οι δύο πιο συνηθισμένες κατηγορίες τέτοιων προτάσεων είναι οι εξής:
(α) Προτάσεις από την εμπειρία μας, και
(β) Προτάσεις που βασίζονται σε μια αυθεντία.
Ακόμα όμως και αυτές τις προτάσεις δεν τις δεχόμαστε άκριτα, αλλά πάντα προσπαθούμε, με άλλους τρόπους, να βεβαιωθούμε όσο είναι δυνατό για την αξιοπιστία τους.

5.1. Προτάσεις από την Εμπειρία

Αν κάποιος μας ρωτήσει «δες αν βράζει το νερό στο μάτι της κουζίνας» και εμείς απαντήσουμε «ναι! βράζει», τότε δεν είναι δυνατό

στην απάντησή μας αυτή κάποιος να μας ρωτήσει «γιατί:». Η ερώτηση «γιατί;» δεν έχει νόημα, εκτός και αν μιλάμε στα πλαίσια της θεωρητικής φυσικής και ερευνάμε τις αιτίες του βρασμού. Η μόνη απάντηση σε μια τέτοια ερώτηση είναι «γιατί το είδα».

Άρα, για τέτοιου είδους προτάσεις, οι οποίες διατυπώνουν πράγματα που αντιληφθήκαμε με τις αισθήσεις μας, δεν μπορούμε να έχουμε επιχειρήματα. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι αυτές τις προτάσεις πρέπει να τις θεωρούμε πάντοτε αληθείς. Κάποιος μπορεί να είναι συστηματικός ψεύτης. Ακόμη, πολλές φορές είναι δυνατόν οι αισθήσεις μας να μας παραπλανήσουν για διάφορους λόγους (είδαμε κάτι από μακριά, χωρίς καλό φωτισμό κτλ.)

Έτσι, για το ίδιο γεγονός είναι δυνατό να έχουμε από διαφορετικούς ανθρώπους διαφορετικές περιγραφές. Δεν έχουμε παρά να δούμε με ποιο τρόπο διάφορες εφημερίδες παρουσιάζουν το ίδιο γεγονός (για παράδειγμα, μια ενέργεια του πρωθυπουργού) τελείως διαφορετικά. Ή ακόμα στα δικαστήρια όπου διαφορετικοί μάρτυρες δίνουν τελείως αντίθετες απόψεις για το ίδιο γεγονός. Όπως ο δικαστής, έτσι και εμείς πρέπει να αξιολογούμε πόσο πιθανό είναι μια τέτοια πρόταση να είναι αληθινή. Άλλοι άνθρωποι είναι πιο αξιόπιστοι από άλλους, άλλοι πιο παρατηρητικοί, άλλοι έχουν κίνητρο να πούνε ψέμα κτλ.

Πρέπει λοιπόν, κάθε φορά που συναντούμε τέτοιες προτάσεις να εκτιμούμε τις πιθανότητες που έχουν να είναι αληθείς. Ή, αν έχουμε αντικρουόμενες μαρτυρίες για το ίδιο γεγονός, να αξιολογούμε ποια μαρτυρία είναι η πιο πιθανή. Για παράδειγμα, αν δέκα μάρτυρες είδαν το ληστή μιας τράπεζας και οι επτά λένε ότι ήταν ξανθός ενώ οι τρεις μελαχροινός, τότε μάλλον θα πρέπει να πιστέψουμε τη γνώμη των πολλών. Αν όμως, ανάμεσα στους τρεις μάρτυρες είναι και ο φύλακας της τράπεζας που η δουλειά του είναι να παρατηρεί τους πελάτες της τράπεζας, τότε ίσως θα πρέπει να θεωρήσουμε ως πιο πιθανή τη δική του μαρτυρία.

Άσκηση 1

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις θα θεωρούσατε ότι είναι γενικά αποδεκτές και δε χρειάζονται επιχείρημα να τις υποστηρίξει και γιατί;

(α) Η Ελλάδα είναι μια δημοκρατική χώρα.

(β) Η τηλεόραση ήρθε στην Ελλάδα στη δεκαετία του εξήντα.

(γ) Πρέπει να αυξήσουμε την παραγωγικότητα της οικονομίας μας.
(δ) Η πλειοψηφία των Ελλήνων είναι ορθόδοξοι χριστιανοί.
(ε) Ένα σπασμένο πόδι χρειάζεται άμεση ιατρική φροντίδα.

5.2. Προτάσεις που Στηρίζονται στην Αυθεντία.

Πολλές φορές δεχόμαστε χωρίς συζήτηση την αλήθεια αυτών που κάποιοι ειδικοί λένε. Αν, για παράδειγμα, η στατιστική υπηρεσία της Ελλάδας ανακοινώσει ότι ο πληθυσμός της χώρας μας είναι έντεκα εκατομμύρια, δεν έχουμε κανένα λόγο να το αμφισβητήσουμε. Στα βιβλία του σχολείου περιέχονται πλήθος πληροφορίες για γεγονότα που συνέβησαν στο παρελθόν, για πειράματα, στατιστικές κτλ. Όλα αυτά τα δεχόμαστε ως αληθινά στηριζόμενοι στην αυθεντία των συγγραφέων των βιβλίων μας και στις πηγές τους. Είναι όμως όλα αυτά πραγματικά σωστά; Αν δούμε, για παράδειγμα, το τι λέμε εμείς και τι οι Τούρκοι στα σχολικά βιβλία για την ελληνική επανάσταση, θα διαπιστώσουμε ότι είναι τελείως διαφορετικά. Αυτό οφείλεται σε δύο λόγους. Πρώτο, στο ότι οι συγγραφείς των βιβλίων παρουσιάζουν μιαν εικόνα όσο γίνεται πιο ευνοϊκή για τη χώρα τους. Δεύτερο, γιατί οι έλληνες συγγραφείς στηρίζονται κατά κανόνα σε ελληνικές πηγές και μαρτυρίες (απομνημονεύματα αγωνιστών κτλ), ενώ οι τούρκοι σε αντίστοιχες τουρκικές και οι πηγές αυτές είναι συχνά μεροληπτικές.

Ιστορία 8η — *Σέρλοκ Χολμς*

Ο Σέρλοκ Χολμς ρώτησε το βοηθό του τι μπορούσε να συμπεράνει από τα ακόλουθα γεγονότα, σε σχέση με μια ληστεία για την οποία υπάρχουν τρεις ύποπτοι οι Α,Β,Γ:
(α) αν ο Α είναι ένοχος και ο Β αθώος, τότε ο Γ είναι ένοχος
(β) ο Γ δε δουλεύει ποτέ μόνος.
(γ) ο Α ποτέ δε συνεργάζεται με το Γ
(δ) τουλάχιστον ένας από τους Α, Β, Γ είναι ένοχος και δεν ανακατεύτηκε στη ληστεία κανένας άλλος εκτός από τους Α, Β και Γ.
Ο βοηθός του έξυσε το κεφάλι του και είπε: Όχι πολλά κύριε. Εσείς μπορείτε να συμπεράνετε ποιοι είναι ένοχοι και ποιοι αθώοι; Όχι, είπε ο Σέρλοκ Χολμς, αλλά έχω αρκετές πληροφορίες για να καταδικάσω έναν από αυτούς.
Ποιος είναι κατ' ανάγκην ένοχος;

Στην ιστορία ειδικά είναι τεράστιας σημασίας η σωστή αξιολόγηση των πηγών μας. Μια μαρτυρία του τέταρτου π.Χ. αιώνα για το Σωκράτη είναι πιο σημαντική από μια άλλη του πρώτου μ.Χ, αιώνα. Ομοίως, σχετικά με τη διδασκαλία του, οι μαρτυρίες του Πλάτωνα θεωρούνται πιο αξιόπιστες από αυτές του Ξενοφώντα, παρ' όλο που και οι δύο ήταν μαθητές του. Τούτο, γιατί ο Πλάτων ήταν και ο ίδιος μεγάλος φιλόσοφος και, άρα, είχε κατανοήσει καλύτερα τη διδασκαλία του Σωκράτη. Πέρα όμως από το πόσο αξιόπιστη είναι μια πηγή ή μαρτυρία, είναι πολύ σημαντικό να μπορούμε να διασταυρώσουμε τις πηγές μας. Δηλαδή να δούμε αν και άλλες μαρτυρίες συμφωνούν. Όσο περισσότερες και πιο έγκυρες μαρτυρίες έχουμε για ένα γεγονός, τόσο αυξάνεται η αξιοπιστία του ότι πράγματι είναι έτσι.

Σημαντική παρατήρηση

Κάθε φορά που αναφερόμαστε σε κάποια αυθεντία, πρέπει να παραπέμπουμε στην αντίστοιχη πηγή. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τον Παπαρρηγόπουλο, οι αιτίες των Περσικών πολέμων ήταν οι Α,Β, Γ. (βλέπε, *Ιστορία του Ελληνικού Έθνους*, Αθήνα 1874, τόμος ΙΙΙ, σελ. 34-40).

Άσκηση 2

Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να βρείτε από μια κατάλληλη αυθεντία (πηγή) στην οποία θα αναφερθείτε για να την υποστηρίξετε.

(α) Η Ελλάδα έχει δημοκρατικό πολίτευμα.

(β) Η τηλεόραση ήρθε στην Ελλάδα στη δεκαετία του εξήντα.

(γ) Πρέπει να αυξήσουμε την παραγωγικότητα της οικονομίας μας.

(δ) Η πλειοψηφία των ελλήνων είναι ορθόδοξοι χριστιανοί.

(ε) Ένα σπασμένο πόδι χρειάζεται άμεση ιατρική φροντίδα.

6. Μερικοί Κανόνες για τη Σωστή Γραφή Επιχειρημάτων

Έχουμε ήδη πει πολλά για τα επιχειρήματα και τι πρέπει να προσέχουμε όταν επιχειρηματολογούμε ή όταν κρίνουμε τα επιχειρήματα άλ-

λων. Σε αυτή την ενότητα συνοψίζουμε τους βασικότερους κανόνες που πρέπει να ακολουθούμε για να διατυπώσουμε ένα σωστό επιχείρημα και δίνουμε έμφαση και σε μερικά άλλα σημεία που δεν εξετάσαμε αναλυτικά έως τώρα.

6.1. Βασικοί Κανόνες για τη Διατύπωση Σωστού Επιχειρήματος

(Α) Είτε γράφουμε ένα επιχείρημα είτε διαβάζουμε ένα κείμενο που περιέχει επιχειρήματα, το πρώτο πράγμα που ρωτάμε είναι «τι θέλω να αποδείξω;» (ή «τι θέλει να αποδείξει ο συγγραφέας;»), δηλαδή το συμπέρασμα του επιχείρηματος.
(Β) Να προσέχουμε να χρησιμοποιούμε καθαρή γλώσσα με σωστή σύνταξη.
Να αποφεύγουμε μακρές περιόδους με πολλές υποτεταγμένες προτάσεις. Να χρησιμοποιούμε λέξεις κατανοητές και να αποφεύγουμε τους νεολογισμούς.
(Γ) Να παρουσιάζουμε τις σκέψεις μας με φυσικό τρόπο και με λογική σειρά, ώστε κάθε πρόταση να έρχεται ως συνέπεια των προηγούμενων. Καλό είναι να χρησιμοποιούμε ένα πρόχειρο χαρτί και εκεί να προσπαθούμε να φτιάχνουμε ένα σχεδιάγραμμα της ροής των ιδεών μας και να διατυπώνουμε τα επιχειρήματά μας με σχηματική μορφή.
(Δ) Να κάνουμε σωστή επιλογή στις προκείμενες που θα υποστηρίξουν το συμπέρασμά μας. Να προσέχουμε οι προκείμενες να είναι όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστες. Να προτιμούμε εξαρτημένες προκείμενες που υποστηρίζουν το συμπέρασμα σε συνδυασμό μεταξύ τους. Να προσέχουμε μήπως ξεχάσαμε κάποια προκείμενη και το επιχείρημά μας είναι ελλειπτικό.
(Ε) Αν το συμπέρασμα μας πρέπει να υποστηριχθεί από πολλές απόψεις, να προσπαθούμε να διακρίνουμε όλες τις σκοπιές από τις οποίες μπορούμε να εξετάσουμε το θέμα μας και να ξεχωρίζουμε τα αντίστοιχα επιχειρήματα.
(Ζ) Να ελέγχουμε με κάθε τρόπο τις αρχικές μας προκείμενες. Είναι οι πηγές μας αξιόπιστες; Μην ξεχνάμε να αναφερόμαστε στις πηγές μας.
(Η) Να προσέχουμε ώστε οι λέξεις που χρησιμοποιούμε να έχουν πάντα την ίδια σημασία. Αν χρησιμοποιούμε λέξεις που έχουν πολλές

σημασίες, να ξεκαθαρίζουμε με ποια σημασία τις χρησιμοποιούμε. Να ορίζουμε τεχνικούς όρους ή άλλες λέξεις, όταν είναι αναγκαίο.
(Θ) Σε κάθε επιχείρημα που χρησιμοποιούμε, και ιδιαίτερα αν είναι παραγωγικό, να προσέχουμε αν είναι σωστά δομημένο, αν πράγματι το συμπέρασμα εξάγεται από τις προκείμενες και να προσπαθούμε να διακρίνουμε σε ποιο είδος επιχειρημάτων ανήκει.
(Ι) Να εξετάζουμε όλες τις τυχόν αντιρρήσεις που κάποιος θα μπορούσε να διατυπώσει για το επιχείρημά μας. Να προσπαθούμε να τις αντικρούσουμε με άλλα επιχειρήματα ή να βελτιώσουμε το επιχείρημα με τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνει ανθεκτικό στις αντιρρήσεις αυτές.

6.2. Μερικά Άλλα Λάθη που Πρέπει να Αποφεύγουμε

Υπάρχουν μερικά λάθη που συχνά συναντάμε σε κείμενα. Αυτά τα λάθη πρέπει να είμαστε ικανοί να τα αναγνωρίζουμε και να τα αποφεύγουμε όταν εμείς γράφουμε ένα κείμενο.
(Α) Πολλές φορές αποφεύγουμε σε ένα επιχείρημα να διατυπώσουμε μια προκείμενη. Αυτό γίνεται είτε από απροσεξία και βιασύνη, είτε επειδή θεωρήσαμε την προκείμενη αυτή ως κάτι προφανές. Από τις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις είναι να παραλείπουμε να ορίσουμε αμφισβητούμενους όρους καθώς και την υποθετική πρόταση στην περίπτωση του παραγωγικού επιχειρήματος του τύπου modus ponens. Έτσι λέμε: «Βρέχει. Πήρα την ομπρέλα μου», ενώ το σωστό είναι:

Όταν βρέχει παίρνω την ομπρέλα μου.
Βρέχει
Πήρα την ομπρέλα μου.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα πιο σύνθετο:
Ο κλέφτης πρέπει να έφυγε από την έξοδο κινδύνου [Σ]. Δε βρίσκεται στο κτίριο τώρα [Π1], δεν τον είδανε να φεύγει [Π2] και υπήρχαν φύλακες προσεκτικοί στις δύο εισόδους [Π3].

Στο παραπάνω επιχείρημα οι δυο προκείμενες δεν είναι αρκετές για να βγει το συμπέρασμα. Αυτό γίνεται, μόνο αν προστεθεί μια τέταρτη προκείμενη [Π4]: «Στην έξοδο κινδύνου δεν υπήρχε φύλακας». Αν όμως παρατηρήσουμε προσεκτικά το επιχείρημα, βλέπουμε ότι ακόμα και έτσι είναι ελλειπτικό. Από τις προκείμενες Π2 και Π3 αυτό που ε-

ξάγεται είναι ότι «ο κλέφτης δεν έφυγε από τις δύο εισόδους» [Π5]. Από την Π1 βγαίνει το συμπέρασμα ότι «ο κλέφτης έφυγε από το κτίριο»[Π6]. Τώρα οι Π2 και Π4 βγάζουν το συμπέρασμα ότι «ο κλέφτης θα μπορούσε να βγει απαρατήρητος από την έξοδο κινδύνου» [Π7]. Και το συμπέρασμα Σ βγαίνει από τις Π6+Π5+Π7, αν προστεθεί μια ακόμα προκείμενη [Π8]: «Εκτός από τις εισόδους και την έξοδο κινδύνου δεν υπάρχει άλλος τρόπος διαφυγής». Βλέπουμε λοιπόν πως σε ένα επιχείρημα που φαίνονταν απλό, μας λείπανε πέντε προκείμενες, οι τρεις από τις οποίες ήταν ενδιάμεσα συμπεράσματα από άλλες. Η σχηματική μορφή του πλήρους επιχειρήματος, όπως διαμορφώθηκε τώρα είναι η εξής:

Π1		Π2+Π3		Π2+Π4		
↓		↓		↓		
Π6	+	Π5	+	Π7	+	Π8
			↓			
			Σ			

Άσκηση 1

Για κάθε ένα από τα παρακάτω επιχειρήματα να εντοπίσετε τις προκείμενες (παραδοχές) που έχουν παραλειφθεί. Να διατυπώσετε τα επιχειρήματα σε σχηματική μορφή.

(α) Η αύξηση του αστικού πληθυσμού στην Ευρώπη έχει πιέσει τους αγρότες να αυξήσουν την παραγωγή τους. Αυτό έγινε με τη χρήση από μέρους τους μεγάλων μηχανημάτων εξοικονόμησης εργασίας, που είχε ως συνέπεια περισσότεροι αγρότες να μεταφερθούν στις πόλεις. Έτσι, ο αγροτικός πληθυσμός, που παλιά ήταν η πλειοψηφία, τώρα είναι ένα μικρό ποσοστό του συνολικού πληθυσμού και έχει χάσει την πολιτική του δύναμη.

(β) Υπάρχει πολύ μεγαλύτερο ποσοστό καρδιακών προσβολών στους καπνιστές, παρά σε αυτούς που δεν καπνίζουν. Υποθέσανε ότι η αιτία της αρτηριοσκλήρωσης στους καπνιστές είναι η νικοτίνη. Σήμερα φαίνεται ότι η πραγματική αιτία είναι το μονοξείδιο του άνθρακα. Σε πειράματα, όπου ζώα εκτέθηκαν για πολλούς μήνες σε μονοξείδιο του άνθρακα, φάνηκαν αλλαγές στα τοιχώματα των αρτηριών τους παρόμοιες με αυτές της αρτηριοσκλήρωσης.

(γ) Ο άνθρωπος έχει σήμερα τη δύναμη να καταστρέψει ή να προστατέψει την άγρια φύση. Τα περισσότερα από τα φάρμακα που χρησιμοποιήθηκαν τα τελευταία πενήντα χρόνια προέρχονται από άγρια φυτά. Αν αυτά τα φυτά δεν υπήρχαν, η ιατρική δε θα είχε προοδεύσει τόσο πολύ και πολλές ανθρώπινες ζωές θα είχαν χαθεί. Είναι, επομένως, σημαντικό για το μέλλον της ιατρικής η διατήρηση της άγριας φύσης.

(Β) Παρ' όλο που οι περισσότερες λέξεις που χρησιμοποιούμε στο λόγο μας έχουν σαφή σημασία, υπάρχουν και άλλες που, αν δεν διευκρινίσουμε με ποιο τρόπο τις χρησιμοποιούμε, είναι δυνατό να έχουμε παρερμηνείες. Για παράδειγμα, όταν μιλάμε για "οικονομική πρόοδο", άλλοι μπορεί να εννούν «την αύξηση του εισοδήματος του μέσου εργαζόμενου» και άλλοι «την αύξηση των κερδών των μεγάλων επιχειρήσεων». Πρέπει λοιπόν να αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε την ίδια λέξη με δύο διαφορετικές σημασίες στο ίδιο κείμενο και να ξεκαθαρίζουμε κάθε φορά με ποια σημασία χρησιμοποιούμε τέτοιες έννοιες.

(Γ) Πρέπει να προσέχουμε να μη χρησιμοποιούμε ασυνείδητα κάποια παραλλαγή του συμπεράσματος, για να υποστηρίξουμε το συμπέρασμα:
Για παράδειγμα: «Ο Θεός υπάρχει, γιατί το γράφει η Βίβλος που λέει πάντα αλήθεια, επειδή είναι ένα θεόπνευστο έργο». Το επιχείρημα αυτό είναι λανθασμένο, γιατί μια προκείμενη «η Βίβλος είναι ένα θεόπνευστο έργο» προϋποθέτει το συμπέρασμά μας. Δηλαδή, για να είναι η Βίβλος θεόπνευστη, πρέπει να υπάρχει Θεός. Άρα χρησιμοποιήσαμε την «ύπαρξη του Θεού», για να αποδείξουμε την «ύπαρξη του Θεού». Το λογικό αυτό σφάλμα το ονομάζουμε και λήψη του ζητουμένου.

(Δ) Να προσέχουμε να μη βγάζουμε συμπεράσματα χρησιμοποιώντας την αιτιολογία της άγνοιας. Ας δούμε πάλι ένα παράδειγμα: «Μερικοί ισχυρίζονται ότι στην Ιαπωνία γίνονται βασανιστήρια. Αλλά εγώ δε γνωρίζω στοιχεία που να επιβεβαιώνουν ότι στην Ιαπωνία γίνονται βασανιστήρια. Άρα αυτοί που το ισχυρίζονται ψεύδονται. Επομένως, στην Ιαπωνία δεν γίνονται βασανιστήρια». Το συμπέρασμά μας δεν είναι ισχυρό, γιατί το ότι δε γνωρίζω κάτι δεν

μπορεί να θεμελιώσει ένα συμπέρασμα, είτε υπέρ είτε κατά.
Σκεφθείτε τη Γερμανία του Χίτλερ. Οι περισσότεροι Γερμανοί δε γνώριζαν ότι υπήρχαν στρατόπεδα συγκεντρώσεως. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι δεν υπήρχαν. Για να είναι ισχυρό το επιχείρημα, πρέπει να πούμε: «Αλλά παρά τη συστηματική έρευνα που έγινε από αντικειμενικούς διεθνείς οργανισμούς σε όλη την Ιαπωνία, δε βρέθηκαν στοιχεία ούτε υπήρξαν μαρτυρίες για βασανιστήρια».

Cohen

(Ε) Ένα ακόμα σημείο που πρέπει να προσέχουμε, είναι στις περιπτώσεις όπου έχουμε ένα σύνολο και τα μέρη ή τα στοιχεία από τα οποία αποτελείται (για παράδειγμα, μια ποδοσφαιρική ομάδα και οι παίκτες από τους οποίους αποτελείται, το πλήρωμα ενός πλοίου και οι ναύτες που το αποτελούν κτλ.)
Στις περιπτώσεις αυτές δεν είναι βέβαιο ότι τις ιδιότητες που έχει το σύνολο τις έχουν και τα μέρη του, ή και το αντίστροφο. Τούτο συμβαίνει γιατί, πολλές φορές, το σύνολο είναι κάτι περισσότερο από το άθροισμα των μερών του. Έτσι, έντεκα καλοί ποδοσφαιριστές δεν είναι βέβαιο ότι φτιάχνουν και μια καλή ομάδα (μπορεί να μη συνεργάζονται μεταξύ τους, να μην ακούνε τον προπονητή κτλ.). Ομοίως πάλι σε μια καλή ομάδα μπορεί μόνο οι μισοί παίκτες να είναι πραγματικά καλοί.

Άσκηση 2

Να εντοπίσετε τα σφάλματα στα παρακάτω επιχειρήματα:
(α) Έχουν διασωθεί πολλά αρχαία ιατρικά κείμενα. Σε κανένα από αυτά δεν αναφέρονται περιπτώσεις καρκίνου. Φαίνεται λοιπόν ότι η ασθένεια του καρκίνου δεν υπήρχε κατά την αρχαία εποχή.
(β) Η καλύτερη ομάδα μπάσκετ θα μπορούσε να γίνει, αν πάρουμε τους καλύτερους παίκτες από όλες τις ομάδες και φτιάξουμε μια καινούρια.
(γ) Οι έφηβοι συχνά πάσχουν από αναιμία. Αντίθετα όμως από ότι πολλές φορές έχει θεωρηθεί, αυτό δεν οφείλεται στην έλλειψη σιδήρου στη δίαιτά τους, αλλά η έλλειψη αυτή είναι ένα φυσιολογικό χαρακτηριστικό της ηλικίας αυτής, η οποία έχει μεγαλύτερες ανάγκες σιδήρου από ό,τι οι άλλοι άνθρωποι.
(δ) Οι νέοι σήμερα έχουν καλύτερη εκπαίδευση από ό,τι οι παπ-

πούδες τους. Ο Βασίλης, που είναι νέος, έχει πάρει καλύτερη εκπαίδευση από τον παππού του.

(ε) Ο μάρτυρας είπε ότι είδε τον Χ κοντά στο κτίριο την ώρα που άρχισε η φωτιά.

Αλλά γνωρίζουμε ότι ο μάρτυρας είχε παλαιότερα διαμάχη με τον Χ. Άρα, η μαρτυρία του είναι αναξιόπιστη και ο Χ δεν είναι ένοχος.

(ζ) Υπάρχει ελευθερία βούλησης στους ανθρώπους. Γιατί οι πράξεις μας εξαρτώνται από τη βούλησή μας και σε κάθε περίπτωση είμαστε υπεύθυνοι των πράξεών μας.

(η) Η δημοκρατία είναι το καλύτερο πολίτευμα, γιατί μόνο σε αυτό οι πολίτες αποφασίζουν για όλα τα σημαντικά προβλήματα. Οι Βρετανοί θεωρούν ότι έχουν δημοκρατία και ότι αυτό είναι το καλύτερο πολίτευμα, γιατί έχει την έγκριση της μεγάλης πλειοψηφίας του λαού. Αυτό όμως είναι λάθος. Στη δημοκρατία της Βρετανίας οι πολίτες εκλέγουν κάθε τέσσερα χρόνια τους αντιπροσώπους τους που θα τους κυβερνήσουν. Σε αυτό το διάστημα η κυβέρνηση παίρνει όλες τις σημαντικές αποφάσεις για τον τόπο. Άρα, δεν αποφασίζουν οι πολίτες. Άρα η Βρετανία δεν είναι δημοκρατία και δεν έχει το καλύτερο πολίτευμα.

6.3 Πώς Γράφουμε ένα Κείμενο

Αυτό που πρέπει πρώτα από όλα να συνειδητοποιήσουμε είναι ότι, όταν γράφουμε ένα κείμενο, δεν γράφουμε για τους εαυτούς μας. Πρόκειται να το διαβάσουν άλλοι. Πρέπει λοιπόν κάθε φορά να ρωτάμε: «Είναι κατανοητά από τους άλλους αυτά που γράφουμε;». Επιπλέον, πρέπει να γράφουμε με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με το κοινό στο οποίο απευθυνόμαστε. Απευθυνόμαστε σε μαθητές, φοιτητές, επιστήμονες, το μέσο άνθρωπο; Σε κάθε περίπτωση οι πληροφορίες που χρησιμοποιούμε και ο τρόπος ανάπτυξης του θέματος πρέπει να προσαρμόζεται στις γνώσεις και τις ικανότητες του αντίστοιχου κοινού.

Συνήθως, όταν γράφουμε ένα κείμενο, ο στόχος μας είναι είτε να εξετάσουμε ένα θέμα είτε να υποστηρίξουμε μια θέση είτε να εξηγήσουμε ένα φαινόμενο. Πολλές φορές όλα αυτά πηγαίνουμε μαζί. Έτσι, για παράδειγμα, αν το πρόβλημά μας είναι οι Ολυμπιακοί αγώνες, τότε πρέπει να εξετάσουμε το θέμα από όλες τις απόψεις, να δούμε τι πράγματι είναι σήμερα οι Ολυμπιακοί αγώνες, να δούμε τις αιτίες που οι αγώνες διαμορ-

φώθηκαν με αυτό τον τρόπο και ποιους σκοπούς εξυπηρετούν. Κατόπιν μπορούμε, με βάση κάποιες αρχές, να κάνουμε κριτική στο θεσμό, να εκφράσουμε θέσεις υπέρ ή κατά, από διάφορες απόψεις, και να υποστηρίξουμε αυτές τις θέσεις με επιχειρήματα που θα αντλούν προκείμενες από την προηγούμενη εξέταση. Βλέπουμε λοιπόν ότι η γραφή ενός επιχειρηματολογικού κειμένου είναι μια αρκετά σύνθετη δραστηριότητα.

Εκείνο που είναι το πιο σημαντικό, όταν ξεκινάμε να γράψουμε κάτι, είναι να μπορούμε να διατυπώσουμε ακριβώς και με σαφήνεια, ποιο είναι αυτό που θέλουμε να υποστηρίξουμε, δηλαδή το τελικό συμπέρασμα της επιχειρηματολογίας μας. Στο συμπέρασμα αυτό υπάρχουν κάποιοι όροι (κοινωνία, φιλία, περιβάλλον, υγεία, οικογένεια, οικονομική ανάπτυξη, δίκαιο κτλ.), τους οποίους πρέπει ίσως να ορίσουμε, δηλαδή να εξηγήσουμε τι σημαίνουν και με ποιο τρόπο τους χρησιμοποιούμε.

Κατόπιν, πρέπει να σκεφθούμε τους λόγους με τους οποίους θα υποστηρίξουμε το συμπέρασμα. Ένα συμπέρασμα, συνήθως, μπορεί να εξετασθεί και να υποστηριχθεί από πολλές απόψεις, από κοινωνική, από οικονομική, από πολιτισμική κτλ. Άρα, είναι δυνατό να έχουμε πολλά επιχειρήματα που υποστηρίζουν τη θέση μας. Πρέπει λοιπόν να ξεχωρίσουμε αυτά τα επιχειρήματα και να τα διατυπώσουμε σαφώς, βρίσκοντας τις προκείμενές τους. Για ευκολία ίσως πρέπει να αριθμήσουμε τα επιχειρήματα και να συμβολίσουμε με γράμματα τις προτάσεις σε κάθε επιχείρημα.

Καλό είναι κατόπιν να φτιάξουμε στο πρόχειρο ένα διάγραμμα στο οποίο να φαίνονται οι σχέσεις μεταξύ των προτάσεων και πώς τα διάφορα επιχειρήματα συνδέονται μεταξύ τους και υποστηρίζουν το συμπέρασμα.

Ας σταματήσουμε και ας σκεφθούμε. Μήπως παραλείψαμε κάποιες προκείμενες; Μήπως κάποιες προκείμενες δεν είναι βέβαιες και πρέπει να τις υποστηρίξουμε με κάποιο άλλο επιχειρήμα; Πράγματι εξάγεται σωστά το συμπέρασμα; Ξαναφτιάχουμε ένα νέο διάγραμμα μετά από τις προσθήκες και τροποποιήσεις που κάναμε.

Ας σκεφθούμε τυχόν αντιρρήσεις που μπορεί κάποιος να φέρει στις θέσεις μας και τα επιχειρήματά μας. Ας προσπαθήσουμε να αντικρούσουμε αυτές τις αντιρρήσεις είτε με παραδείγματα είτε με επιχειρήματα.

Κατόπιν να εντάξουμε στο διάγραμμά μας τις νέες προσθήκες και τροποποιήσεις και μετά να αρχίσουμε να γράφουμε το κείμενό μας ακολουθώντας τη λογική ροή του διαγράμματος.

Άσκηση 3

Γράψτε από ένα μικρό κείμενο για να πείσετε με επιχειρήματα παιδιά του δημοτικού σχολείου ότι: (α) Τα μαθηματικά είναι πολύ σημαντικό μάθημα για την εξέλιξή τους. (β) Δεν πρέπει να λένε ψέματα, (γ) Οι συμμαθητές τους έχουν τα ίδια δικαιώματα με αυτούς.

Άσκηση 4

Γράψτε από ένα μικρό κείμενο για να πείσετε με επιχειρήματα τους γονείς σας ότι:
(α) Είναι πιο σωστό να διαλέξετε εσείς το επάγγελμα ή την επιστήμη που θα ακολουθήσετε. (β) Δεν πρέπει να είναι υπερπροστατευτικοί μαζί σας.

Άσκηση 5

Να πάρετε τρία θέματα παλαιότερων εκθέσεων και να τα αναπτύξετε με επιχειρήματα, ακολουθώντας τις οδηγίες που σας δώσαμε παραπάνω.